ریاضیات برای همه

آ. ای. مارکوشویچ

اعداد مختلط و بازتاب های متشابه الزاویه



ریاضیات برای همه

آ. ای. مارکوشویچ

اعداد مختلط و بازتاب‌های متشابه‌الزاویه

بنگاه نشریات ”میر،، مسکو

ترجمه: س. والری

На персидском языке

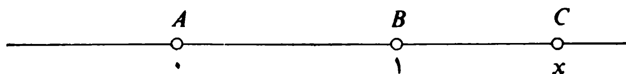
۱۹۸۲



بنگاه نشریات ''میر''

۱. برای نمایش هندسی اعداد حقیقی، محور عددی بکار میرود که عبارتست از خط راستی که بر روی آن نقطهٔ A موسوم به مبدأ مختصات و نمایندهٔ عدد صفر، و نیز یک نقطهٔ دیگر، B، نمایشگر عدد $+1$ (شکل ۱) داده شده‌اند.

جهت A بطرف B بعنوان سوی مثبت محور عددی، و پاره‌خط AB بعنوان واحد طول تلقی میشود. هر پاره‌خط AC نمایشگر عدد حقیقی x می باشد که قدر مطلق آن با طول پاره‌خط برابر است. اگر C بر A منطبق نباشد (یعنی اگر این عدد x مخالف صفر باشد) آنگاه x وقتیکه جهت A بطرف C با سوی مثبت محور یکی باشد مثبت است و وقتیکه این جهت خلاف سوی مثبت محور باشد منفی است.



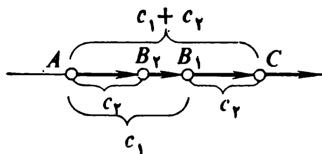
شکل ۱

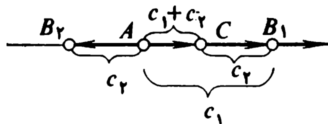
۲. از این ببعد هر پاره‌خط محور عددی را بمثابهٔ پاره‌خط راستادار یا بردار روی خط راست در نظر می گیریم. برای هر بردار ابتداء و انتهاء قایل هستیم و جهت ابتداء بطرف انتهاء را بعنوان جهت بردار قبول مینمائیم. بردار را با دو حرف مینویسیم که اولی

نمایشگر ابتداء و دومی نمایشگر انتهاء میباشد. هر بردار اعم از محل ابتدای آن (که الزاماً در نقطهٔ A نیست) یک عدد حقیقی را نمایش میدهد که قدر مطلق آن با طول بردار برابر است. این عدد وقتیکه جهت بردار با سوی مثبت محور یکی باشد مثبت است و وقتیکه این جهت خلاف سوی مثبت باشد منفی است چنانکه مثلا بردار AB (با ابتدای A و انتهای B) نمایشگر عدد ۱+، و بردار BA (با ابتدای B و انتهای A) نمایشگر عدد ۱- است.

۳. جهت بردار را میتوان با تعیین زاویه بین آن و سوی مثبت محور مشخص نمود. هرگاه جهت بردار با سوی مثبت محور یکی باشد میتوان این زاویه را برابر صفر درجه شمرد و هرگاه خلاف سوی مثبت محور باشد آنگاه میتوان آنرا برابر 180° (یا -180°) شمرد. فرض کنیم x یک عدد حقیقی باشد. اگر x مخالف صفر باشد ($x\neq 0$) در آنصورت زاویه بین بردار نمایشگر این عدد و سوی مثبت محور عددی را آرگومان عدد x گویند. بدیهی است که آرگومان عدد مثبت برابر صفر درجه است و آرگومان عدد منفی برابر 180° (یا -180°) میباشد. آرگومان عدد x اینطور نمایش داده میشود: $\operatorname{Arg} x$ (Arg سه حرف اول لغت لاتینی argu-mentum است که در اینجا بمعنی علامت یا نشانه میباشد). عدد صفر را نه بردار بلکه نقطه نمایش میدهد. با وجودیکه از این ببعد ما نقطه را بعنوان حالت خاصی از بردار یعنی بثابهٔ برداری با طول صفر در نظر میگیریم در این مورد قادر نخواهیم بود از جهت یا زاویهٔ آن با محور عددی سخن بمیان آوریم. بنا بر این، برای عدد صفر هیچگونه آرگومانی قایل نخواهیم بود.

۴. حال به تعبیر هندسی اعمال روی اعداد حقیقی میپردازیم. در





شکل ۲

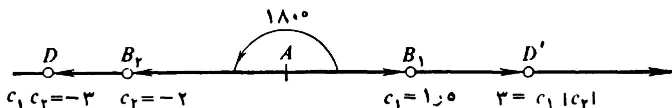
این رهگذر، اول باید سر تعبیر جمع و ضرب تامل نمائیم برای اینکه بعداً آسانتر بتوانیم به تعبیر اعمال معکوس یعنی تفریق و تقسیم بپردازیم. فرض کنیم c_1 و c_2 دو عدد حقیقی، و AB_1 و AB_2 بردارهای نمایشگر آنها باشند. در صدد جستجوی قواعدی بر می آئیم که طبق آنها با علم به بردارهای AB_1 و AB_2 بتوان بردار نمایشگر حاصلجمع $c_1 + c_2$ یا حاصلضرب c_1c_2 را ساخت. از عمل جمع شروع مینمائیم. خلاصه، بردار AB_1 نمایشگر جمعیدهٔ اول را چکار باید کرد تا بردار AC نمایشگر حاصلجمع بدست آید؟

بآسانی میتوان تحقیق نمود که در همهٔ موارد برای این منظور کافی است از انتهای بردار AB_1، بردار B_1C را که از نظر طول و جهت با بردار AB_2 یکی باشد جدا نمائیم. بردار مطلوب، بردار AC است (شکل ۲).

۵. میرویم سر عمل ضرب. اگر یکی از سازه‌ها صفر باشد حاصلضرب نیز برابر صفر است. در اینصورت بردار نمایشگر حاصلضرب بسادگی بصورت نقطه در می‌آید. فرض میکنیم هیچ یک از سازه‌ها برابر صفر نباشد. آنگاه قدر مطلق* حاصلضرب c_1c_2 برابر

---

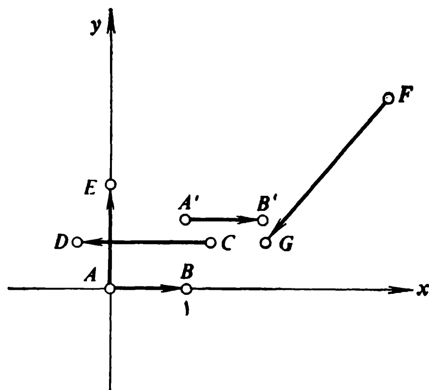
* قدر مطلق یک عدد c اینطور نمایش داده میشود: $|c|$. مثلا $|5|=5$، $|-3|=3$، $|0|=0$.



شکل ۳

خواهد بود با $|c_1| \times |c_2|$ یعنی با حاصلضرب قدرمطلق‌های c_1 و c_2 بنا بر این، طول بردار AD نمایشگر حاصلضرب برابر خواهد بود با حاصلضرب طول بردارهای AB_1 و AB_2 که نمایشگر سازه‌ها میباشند. علامت حاصلضرب c_1c_2 با علامت c_1 یکی است وقتی $c_2>0$ و مخالف آن است وقتی $c_2<0$. بعبارت دیگر، جهت AD با جهت AB_1 یکی است وقتیکه $\operatorname{Arg} c_2 = 0$ (یعنی $c_2>0$)، و مخالف جهت AB_1 است وقتیکه $\operatorname{Arg} c_2 = 180^\circ$ (یعنی $c_2<0$). حال، جواب این سوال مشکل نیست که بردار AB نمایشگر مضروب c_1 را چکار باید کرد تا بردار AD نمایشگر حاصلضرب c_1c_2 از آن بدست آید؟ ($c_1 \neq 0$ و $c_2 \neq 0$) برای این منظور لازم است طول بردار AB_1 را در $|c_2|$ ضرب نموده (با حفظ همان جهت) و سپس بردار تغییریافته را بزاویهٔ مساوی آرگومان c_2 (یعنی بزاویهٔ صفر درجه در ازای $c_2>0$، و یا بزاویهٔ 180° در ازای $c_2<0$) چرخاند. بردار بدست آمده، نمایشگر حاصلضرب میباشد. این قاعده طی مثالی در شکل ۳ توضیح شده است ($c_1 = 1{,}5$ و $c_2 = -2$).

۶. به هر بردار واقع بر روی خط راست، ما عدد نمایش شده بوسیلهٔ آن را نسبت داده‌ایم. اکنون هرگونه بردارهای واقع در صفحه را مورد بررسی قرار داده و به هر یک از آنها نیز عدد نمایش شده توسط آن را نسبت میدهیم. اعدادی که از این راه حاصل میشود



شکل ٤

اعداد مختلط نام دارد و، بتفاوت از اعداد حقیقی، دارای خصلت دیگر، خصلت عمومیتر می باشد. معلوم میشود که اعداد حقیقی فقط حالت خاصی از اعداد مختلط است قیاس بر اینکه اعداد صحیح، حالت خاصی از اعداد گویا، و اعداد گویا حالت خاصی از اعداد حقیقی میباشد.

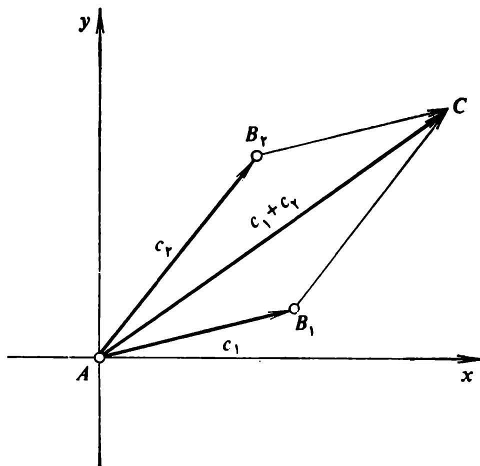
کار را از اینجا آغاز میکنیم که در صفحه‌ایکه بردارها را در آن بررسی می کنیم دو خط راست متعامد بصورت دو محور عددی Ax و Ay از یک مبدأ مختصات A عبور داده و فرض میکنیم پاره‌خط AB نمایشگر واحد طول باشد (شکل ٤). آنگاه هر بردار واقع بر روی محور Ax یا موازی با آن را همچنان میتوان بعنوان سیمای هندسی (یا نمایش هندسی) عدد حقیقی تلقی نمود. بدینترتیب بردارهای AB و $A'B'$، هر یک بطول واحد و با جهت در سوی مثبت Ax، نمایشگر عدد ۱ میباشند و بردار CD بطول ۲ و با جهت معکوس، نمایشگر عدد ۲- است. بردارهائی از قبیل AE و FG که بر روی Ax واقع نیستند و با آن موازی نمیباشند هیچ عدد حقیقی را

نمایش نمیدهند، در مورد این بردارها میگوئیم که آنها نمایشگر اعداد موهومی هستند. ضمناً بردارهائی که از نظر طول با هم برابر و در یک جهت اند همان عدد را نمایش میدهند در صورتیکه بردارهائی که از نظر طول یا جهت از هم متفاوتند نمایشگر اعداد موهومی مختلف میباشند. در اینجا ما کمی جلوتر پریده‌ایم چون، در حالیکه هنوز از اعداد موهومی آگاهی نداریم، از سیمای آنها صحبت بمیان میاوریم. اما در زندگی نیز کم نیستند مواردیکه آشنائی با تصویر شخص زودتر از آشنائی با خود شخص صورت میگیرد.

در فوق ما نشان داده‌ایم که اعمال روی اعداد حقیقی را میتوان با اعمال روی بردارهای نمایشگر آنها عوض نمود. قیاس بر این، اعمال روی اعداد موهومی را نیز با اعمال روی بردارهای نمایشگر آنها عوض مینمائیم. قواعد اعمال را از نو در نمی آوریم بلکه قواعدی را که برای جمع و ضرب اعداد حقیقی پیدا شده بصورت هندسی حفظ مینمائیم. تنها تفاوتی که میماند آنستکه اعداد حقیقی توسط بردارهای واقع بر روی خط راست Ax (و یا توسط بردارهای موازی با آن) نمایش داده میشد در صورتیکه اعداد موهومی بوسیلهٔ بردارهائیکه در صفحه واقع هستند ولی بر روی Ax قرار ندارند و با Ax موازی نیستند نمایش داده میشوند.

۷. قبل از اینکه جلو برویم تاکید می نمائیم که اصطلاح اعداد مختلط (مختلط بمعنی ترکیبی)، هم به اعداد حقیقی (که دیگر با آنها آشنا هستیم) و هم به اعداد موهومی (که عجالتاً آنها را فقط از روی ”تصویر“ میشناسیم) اطلاق میشود.

من باب مقایسه یادآوری میکنیم که هنگام بررسی اعداد گویا و گنگ با هم نیز عنوان عمومی ”اعداد حقیقی“ مورد استفاده قرار میگیرد.

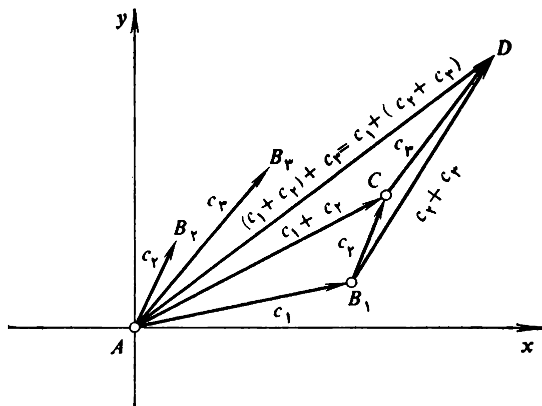


شکل ۵

حال به جمع اعداد مختلط میپردازیم. قرار بر این شد که قاعدهٔ جمع اعداد حقیقی را بقوهٔ خود باقی بگذاریم. دو بردار AB_1 و AB_2 مفروض است که دو عدد مختلط نامشخص c_1 و c_2 را نمایش میدهد. برای ساختن بردار نمایشگر حاصلجمع آنها، c_1+c_2، از انتهای بردار AB_1 بردار B_1C را جدا مینمائیم که از نظر طول و جهت با بردار AB_2 یکی باشد. بردار AC که ابتدای AB_1 را به انتهای B_1C وصل مینماید همانا بردار مطلوب است (شکل ۵).

در اینجا مطلب تازه آنستکه اکنون ما این قاعده را در مورد جمع اعداد مختلط (که بوسیلهٔ هرگونه بردارهای روی صفحه نمایش داده میشوند) بکار میبریم در صورتیکه قبلا فقط در مورد اعداد حقیقی (که بوسیلهٔ بردارهای روی خط راست نمایش داده میشوند) بکار میبردیم.

اگر همان قاعده را برای ساختن حاصلجمع c_2+c_1 (جمعیده‌ها جا



شکل ٦

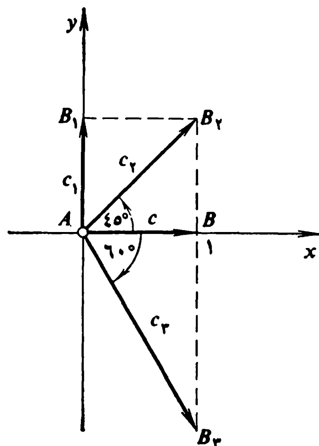
عوض کردند) بکار ببریم لازم است از انتهای بردار AB_2 نمایشگر c_2، برداری را جدا نمائیم که از لحاظ طول و جهت با بردار AB_1 (نمایشگر c_1) یکی باشد. بدیهیست که ما به همان نقطهٔ C میرسیم (در شکل ٥ AB_1CB_2 متوازی‌الاضلاع است) و بنا بر این، حاصلجمع c_2+c_1 مانند حاصلجمع c_1+c_2 بوسیلهٔ همان بردار AC نمایش داده میشود. بعبارت دیگر، از قاعدهٔ جمع، صحت قانون جابجائی نتیجه میشود:

$$c_2+c_1=c_1+c_2$$

بآسانی میتوان ثابت کرد که قانون ترکیبی نیز صحیح است:

$$(c_1+c_2)+c_3=c_1+(c_2+c_3)$$

تمام ترسیمات ضروری در شکل ٦ آورده شده است. واضح است که با جمع کردن (c_1+c_2) (بردار AC) با c_3 (بردار CD) ما همان بردار AD را بدست می آوریم که در نتیجهٔ جمع c_1 (بردار AB_1) با (c_2+c_3) (بردار B_1D) بدست آوردیم.

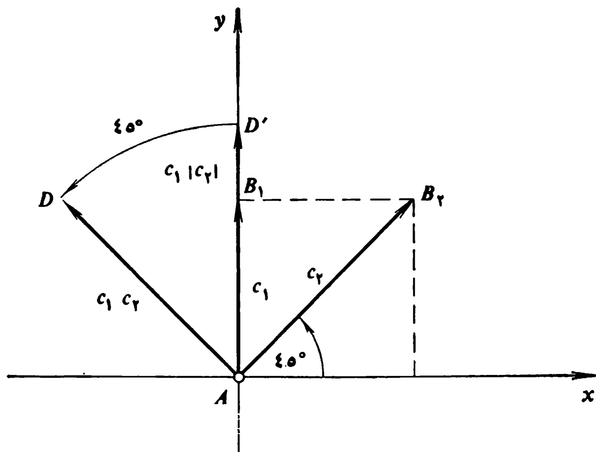


شکل ۷

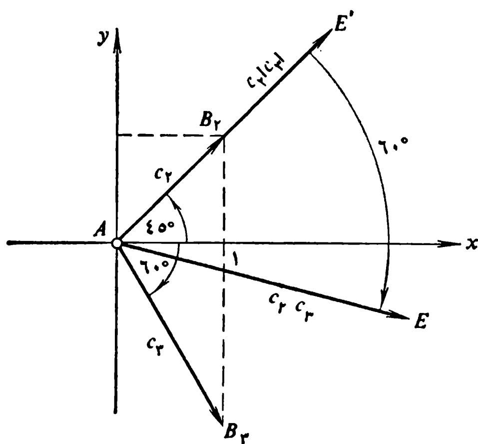
۸. قبل از اینکه سر عمل ضرب برویم مفهوم قدر مطلق و آرگومان را در مورد اعداد مختلط بکار میبریم.

فرض میکنیم که بردار AB عدد مختلط c را نمایش میدهد. طول بردار AB، قدر مطلق c نامیده میشود و زاویه بین جهت مثبت محور Ax و بردار AB، آرگومان c نام دارد. این زاویه را میتوان در جهت خلاف گردش عقربهٔ ساعت حساب نمود که در این صورت مقدار آن مثبت است و یا در جهت گردش عقربهٔ ساعت که در این صورت مقدار آن منفی است. از این گذشته، میتوان بطور دلخواه هر مضرب صحیح ۳۶۰° را بآن اضافه نمود.

قدر مطلق و آرگومان عدد c مانند حالت اعداد حقیقی نمایش داده میشود: $|c|$ و $\operatorname{Arg} c$. مطلب تازه نسبت به حالت اعداد حقیقی اینستکه آرگومان عدد موهومی، مخالف صفر درجه و مخالف ۱۸۰°± است در صورتیکه برای اعداد حقیقی (مخالف صفر) آرگومان ممکن است صفر درجه (برای عدد مثبت) و یا ۱۸۰°± (برای عدد منفی) باشد.


y
D′
٤٥°
$c_1|c_2|$
B_1
B_2
D
c_2
c_1
$c_1\ c_2$
٤٥°
A
x

شکل ۸


y
E′
$c_2|c_3|$
B_2
٦٠°
c_2
A
٤٥°
x
١
٦٠°
$c_2\ c_3$
E
c_3
B_3

شکل ۹

در شکل ۷ بردارهای AB، AB_1، AB_2 و AB_3 که نمایشگر اعداد مختلط c، c_1، c_2 و c_3 هستند رسم شده‌اند. خواننده صحت گزاره‌های زیر را بآسانی تحقیق خواهد کرد:

$$|c| = |c_1| = 1, \quad |c_2| = \sqrt{2} \quad |c_3| = 2;$$

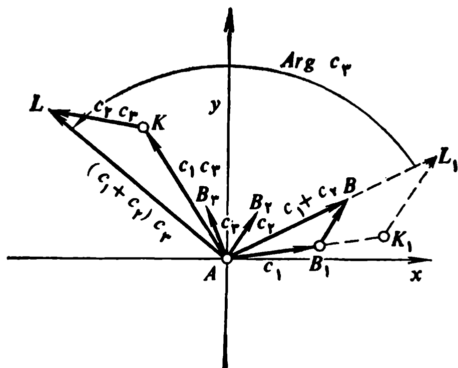
$$\operatorname{Arg} c = 0°, \ \operatorname{Arg} c_1 = 90°, \ \operatorname{Arg} c_2 = 45°,$$

$$\operatorname{Arg} c_3 = -60° \ (\text{یا } 300°)$$

۹. حال که مفاهیم قدر مطلق و آرگومان عدد مختلط برقرار گردید میتوان قاعدهٔ ضرب اعداد مختلط را نیز بیان نمود. این قاعده لفظ به لفظ با قاعدهٔ مربوط به ضرب اعداد حقیقی یکی است: برای ضرب عدد مختلط c_1 در عدد مختلط c_2 ($c_1 \neq 0$ و $c_2 \neq 0$) باید طول بردار نمایشگر c_1 را در $|c_2|$ ضرب کرد (با حفظ همان جهت) و سپس بردار تغییریافته را بزاویهٔ برابر با آرگومان c_2 در حول نقطهٔ A چرخاند. بردار بدست آمده نمایشگر حاصلضرب c_1c_2 خواهد بود. مثلا حاصلضرب c_1c_2 بوسیلهٔ بردار AD (شکل ۸)، و حاصلضرب c_2c_3 بوسیلهٔ بردار AE (شکل ۹) نمایش داده میشود.

در مورد قاعدهٔ ضرب باید اضافه نمود که هرگاه لااقل یکی از سازه‌ها برابر صفر باشد حاصلضرب نیز برابر صفر خواهد بود.

اگر قاعدهٔ ضرب را در مورد حاصلضرب c_2c_1 (با تغییر ترتیب سازه‌ها) بکار بریم آنگاه باید طول بردار نمایشگر c_2 را در $|c_1|$ ضرب نموده و بردار تغییریافته را بزاویهٔ برابر آرگومان c_1 در حول نقطهٔ A چرخاند. هویداست که نتیجه همان خواهد بود که از ضرب c_1c_2 بدست آمد: در هر دو مورد طول بردار بدست‌آمده $|c_1||c_2|$ است و زاویهٔ بین Ax و این بردار برابر است با $\operatorname{Arg} c_1 + \operatorname{Arg} c_2$.



شکل ۱۰

بدینترتیب

$$c_1c_2 = c_2c_1$$

یعنی قانون جابجائی دربارهٔ ضرب اعداد مختلط صادق است.

بطور مشابه، قانون ترکیب نیز صدق میکند:

$$(c_1c_2)c_3 = c_1(c_2c_3)$$

در واقع هم، هر یک از حاصلضرب‌های مورد بررسی بوسیلهٔ همان بردار نمایش داده میشود که طول آن $|c_1| \times |c_2| \times |c_3|$ است و زاویهٔ بین محور Ax و این بردار مساویست با $\mathrm{Arg}\,c_1 + \mathrm{Arg}\,c_2 + \mathrm{Arg}\,c_3$.

و بالاخره صحت قانون توزیع را ثابت مینمائیم:

$$(c_1 + c_2)c_3 = c_1c_3 + c_2c_3$$

در شکل ۱۰، بردار AB مجموع $c_1 + c_2$ را نمایش میدهد. اگر با حفظ جهت‌های AB_1 و AB_2 طول هر ضلع مثلث AB_1B را در $|c_3|$ ضرب نمائیم مثلث AK_1L_1 متشابه مثلث AB_1B بدست می‌آید. این مثلث از بردارهای AK_1، K_1L_1 و AL_1 تشکیل شده

که از بردارهای c_1، c_2 و (c_1+c_2) با ضرب تمام طول‌ها در $|c_3|$ بدست می‌آیند (بدون تغییر جهات). حال مثلث AK_1L_1 را بزاویهٔ $\operatorname{Arg} c_3$ در حول نقطهٔ A چرخانده و مثلث AKL را بدست می‌آوریم. طبق قاعدهٔ ضرب، بردار AK در این مثلث c_1c_3 را، KL، c_2c_3 را و AL، $(c_1+c_2)c_3$ را نمایش میدهد. طبق قاعدهٔ جمع، از همین مثلث پیدا میکنیم:

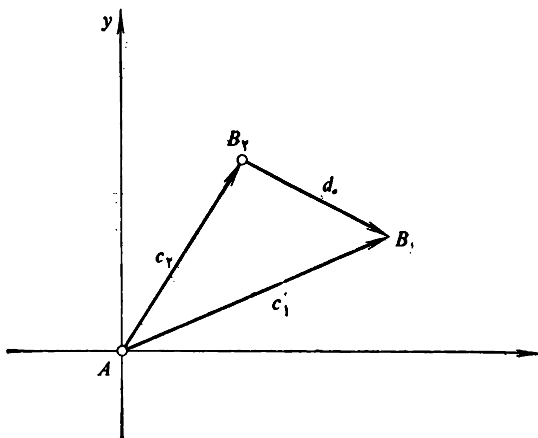
$$c_1c_3 + c_2c_3 = (c_1+c_2)\ c_3$$

فهوالمطلوب.

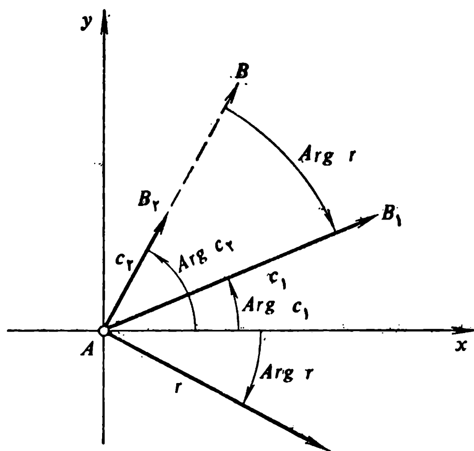
۱۰. اعمال تفریق و تقسیم بمثابهٔ اعمالی معکوس نسبت به جمع و ضرب تعریف میشوند. بویژه ما عدد مختلط d را تفاضل عددهای c_1 و c_2 میگوئیم و آنرا بصورت $d = c_1 - c_2$ مینویسیم اگر $c_1 = c_2 + d$ یعنی اگر c_1 حاصلجمع c_2 و d باشد. با نمایش این رابطهٔ بین c_2، d و c_1 در شکل ۱۱ میبینیم که بردار نمایشگر تفاضل $c_1 - c_2$ در صورتی بدست می‌آید که نقطهٔ B_2 (انتهای بردار نمایشگر مفروق) را به نقطهٔ B_1 (انتهای بردار نمایشگر مفروق‌منه) وصل نموده و نقطهٔ اول را بعنوان مبدأ بردار و نقطهٔ دوم را بعنوان انتهای این بردار بپذیریم.

قیاس بر این، عدد مختلط r را خارجقسمت اعداد c_1 و c_2 $(c_2 \neq 0)$ میگوئیم و مینویسیم $r = c_1 : c_2$ یا $r = \frac{c_1}{c_2}$ اگر $c_1 = c_2 r$ یعنی اگر c_1 حاصلضرب c_2 در r باشد (شکل ۱۲).

از اینجا نتیجه میشود که $|r|$ یعنی طول بردار نمایشگر r برابر است با $\frac{|c_1|}{|c_2|}$ و $\operatorname{Arg} r$ برابر است با زاویهٔ B_2AB_1 که از AB_2 بطرف AB_1 حساب میشود (در شکل ۱۲، این جهت موافق



شکل ۱۱



شکل ۱۲

گردش عقربهٔ ساعت است و بالنتیجه زاویه باید منفی تلقی شود).

حال به بررسی حالات خاص میپردازیم. اگر c_1 و c_2 بوسیلهٔ بردارهای موازی و همسو نمایش داده شود آنگاه زاویهٔ B_2AB_1 مساوی صفر درجه است و در نتیجه، $\text{Arg}\, r = 0^\circ$ یعنی r عددیست حقیقی و مثبت. و اما اگر c_1 و c_2 بوسیلهٔ بردارهای موازی و دارای جهات مخالف نمایش داده شود آنگاه زاویهٔ B_2AB_1 برابر 180°، و عدد r حقیقی و منفی است.

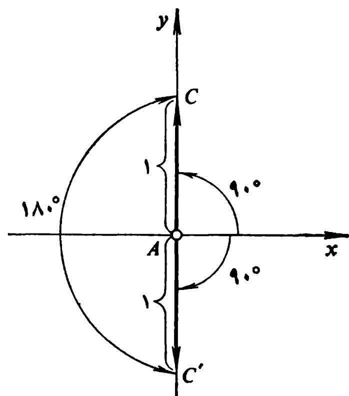
ضمن نتیجه‌گیری میتوان گفت که جمع و ضرب اعداد مختلط از همان قوانین جابجائی، ترکیب و توزیع متابعت مینماید که در حالت اعداد حقیقی برقرار است و تفریق و تقسیم چنانکه در مورد اعداد حقیقی نیز صادق است بعنوان اعمالی معکوس جمع و ضرب تعریف میشود. لذا همهٔ قواعد عملیاتی و فرمولهای استخراجی جبر در مورد اعداد حقیقی، بلحاظ تعریف اعمال و قوانین مذکور باید در مورد اعداد مختلط نیز بقوهٔ خود باقی بماند. مثلا

$$(c_1 + c_2)(c_1 - c_2) = c_1^2 - c_2^2, \quad (c_1 + c_2)^2 = c_1^2 + 2c_1c_2 + c_2^2,$$

$$\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_3}{c_4} = \frac{c_1c_4 + c_2c_3}{c_2c_4} \qquad (c_2 \neq 0 \ , \ c_4 \neq 0)$$

و غیره.

۱۱. هنگام مطالعهٔ ریاضیات، خواننده بطور مکرر با بسط (یا تعمیم) مفهوم عدد رو برو شده است. این امر چه در علم حساب هنگام طرح موضوع کسرها و چه در جبر هنگام طرح موضوع اعداد منفی و بعداً در مبحث اعداد گنگ نیز صورت گرفت هر بسط جدید مفهوم عدد امکان حل مسایلی را فراهم آورد که قبلا غیر قابل حل یا حتی بیمعنی بنظر میرسید. بدینترتیب افتتاح مبحث کسرها

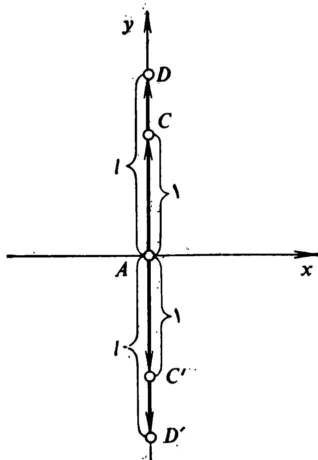


شکل ۱۳

امکان داد تا در همهٔ حالاتی که مقسوم‌علیه مخالف صفر است دو عدد بر یکدیگر تقسیم شود مثلا ٤ بر ۳ یا ۲ بر ٥. گشایش مبحث اعداد منفی امکان داد تا در همهٔ حالات، عمل تفریق انجام شود مثلا ٥ از ۲ کم شود. گشایش مبحث اعداد گنگ امکان داد طول هرگونه پاره‌خطی که با واحد، مقیاس مشترکی ندارد، بشکل عددی بیان شود مثلا طول قطر مربعی بضلع واحد. ولی تنها با اکتفاء به اعداد حقیقی ما نمیتوانستیم جذر عدد منفی را بگیریم. اینک ثابت میکنیم که برقراری مفهوم اعداد مختلط، این مساله را قابل حل مینماید. طبیعتاً جذر عدد مختلط c (جذر را با علامت $\sqrt{c}$ نمایش میدهیم) ما عدد مختلط a را میگوئیم که مجذور آن (یعنی حاصلضرب آن در خود) برابر c میباشد. بدیگر سخن، $a=\sqrt{c}$ بمعنی $aa=c$ است. عدد منفی c مثلا $c=-۱$ مفروض است. برای یافتن $\sqrt{-۱}$ ما باید معادلهٔ $a^۲=-۱$ را حل نمائیم. ضرب a در a بمعنای ضرب طول بردار نمایشگر a در $|a|$ است یعنی در همان طول بدون تغییر جهت a، و گردش بعدی بردار حاصل شده بدور

نقطهٔ A بزاویهٔ برابر $\operatorname{Arg} a$. آشکار است که طول بردار حاصل شده برابر $|a|^{۲}$ خواهد بود. ولی بردار پیدا شده باید عدد ۱- را نمایش دهد. لذا طول آن برابر واحد است. خلاصه، $|a|^{۲}=۱$ و بنا بر این $|a|=۱$ (طول بردار همیشه عددیست نامنفی). سپس، زاویهٔ بین بردار نمایشگر $a^{۲}$ و محور Ax برابر است با $\operatorname{Arg} a+\operatorname{Arg} a=۲\operatorname{Arg} a$. از طرف دیگر، $a^{۲}=-۱$ و بدینترتیب این زاویه باید با $+۱۸۰^{\circ}$ یا -۱۸۰° برابر باشد. بنا بر این، $۲\operatorname{Arg} a=\pm۱۸۰^{\circ}$ و از اینجا یا $\operatorname{Arg} a=۹۰^{\circ}$ و یا $\operatorname{Arg} a=-۹۰^{\circ}$. در نتیجه، ما دو بردار مختلف AC و AC' را که دو مقدار مختلف $\sqrt{-۱}$ را نمایش میدهند بدست آوردیم (شکل ۱۳). عدد موهومی که توسط بردار AC نمایش داده میشود با حرف i نمایش داده و واحد موهومی نامیده میشود. داریم: $|i|=۱$، $\operatorname{Arg} i=۹۰^{\circ}$. بآسانی میتوان دریافت که عدد موهومی نمایش داده شده بوسیلهٔ بردار AC' را میتوان از i با ضرب i در ۱- حاصل نمود. در واقع طبق قاعدهٔ ضرب، برای این منظور لازم است طول AC را در $|-۱|=۱$ ضرب نمود (بردار AC در اثر این عمل تغییر نخواهد کرد) و سپس بزاویهٔ $\operatorname{Arg}(-۱)=۱۸۰^{\circ}$ بدور A چرخاند. بردار AC' بدست می‌آید. نتیجتاً عدد موهومی متناظر با این بردار، $(-۱)i$ یا $-۱\times i$ و یا کوتاهتر، $-i$ است. خلاصه، $\sqrt{-۱}=\pm i$.

۱۲. یک بردار AD واقع بر محور Ay (یا موازی با آن) را در نظر میگیریم (شکل ۱۴). فرض کنیم طول آن برابر l باشد. اگر جهت این بردار با جهت مثبت محور Ay (بطرف بالا نسبت به Ax) موافق باشد آنگاه عدد موهومی c نمایش داده شده توسط آنرا میتوان از i با ضرب در عدد مثبت l حاصل نمود، بنا بر این $c=li$.

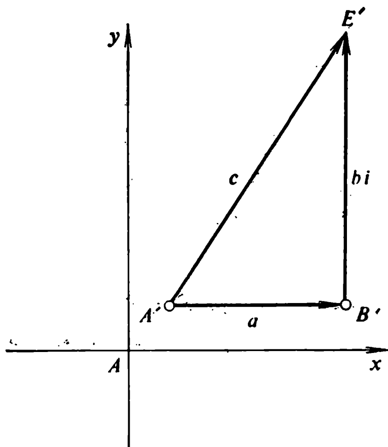


شکل ۱۴

اگر جهت AD مخالف جهت مثبت Ay باشد آنگاه عدد c از i با ضرب در عدد منفی $-l$ (یا از $-i$ با ضرب در l) حاصل میشود. بنا بر این، در اینصورت $c = -li$.

خلاصه، هرگونه بردار (با طول مخالف صفر) واقع بر محور Ay (یا موازی با آن) عدد موهومی نوع $\pm li$ را نمایش میدهد که در آن علامت + یا − برحسب موافقت یا مخالفت جهت بردار با جهت مثبت محور Ay انتخاب میشود. بنا بر این، محور Ay را محور موهومی گویند. محور Ax که همهٔ بردارهای آن نمایشگر اعداد حقیقی هستند محور حقیقی نام دارد.

یک بردار $A'E'$ را که بر این یا آن محور واقع نبوده و موازی با محورها نیست در نظر میگیریم. از طریق ترسیمی مانند شکل ۱۵ میتوان عدد c نمایش داده شده توسط این بردار را بصورت مجموع دو عدد دیگر نمایش داد: یکی نمایش داده شده بوسیلهٔ بردار $A'B'$



شکل ۱۰

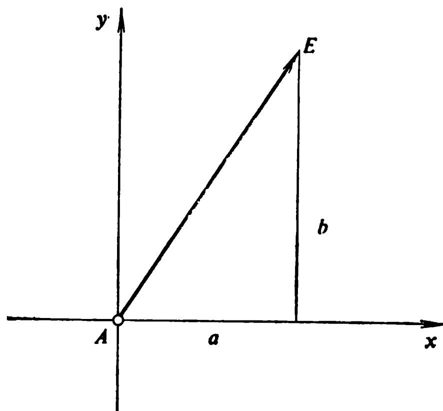
موازی با Ax (یا واقع بر Ax) و دیگری نمایش داده شده بوسیلهٔ بردار $B'E'$ موازی با Ay. اما $A'B'$ یک عدد حقیقی a را، و $B'E'$ عدد موهومی نوع bi را نمایش میدهد، بنا بر این $c = a + bi$.

بدینترتیب، ما عدد موهومی c را بوسیلهٔ اعداد حقیقی a و b و واخد موهومی i نمایش دادهایم. چون بردار $A'E'$ با هیچ یک از محورها موازی نیست لذا $a \neq ۰$ و $b \neq ۰$. بآسانی میتوان دریافت که اعداد نمایش داده شده بوسیلهٔ بردارهای موازی این یا آن محور را میتوان بشکل مشابه نوشت یعنی اگر بردار موازی محور حقیقی باشد آنگاه نمایشگر عدد نوع $a + ۰ \times i$ است و اگر موازی محور موهومی باشد آنگاه عدد نوع $۰ + bi$ را نمایش میدهد.

خلاصه، هر عدد مختلط c را میتوان بصورت $c = a + bi$ نمایش داد که a و b اعداد حقیقی و i واخد موهومی است.

۱۳. نتیجه‌گیری میکنیم. ما با نمایش اعداد حقیقی بوسیلهٔ بردارهای واقع بر یک خط راست شروع کرده و قواعد مربوط به اعمال روی آنها را بصورت هندسی در آوردیم بنحویکه اعمال روی بردارها را جانشین این اعمال نموده و سپس هر گونه بردارهای روی صفحه را نمایشگر اعداد نوع کلیتر یعنی اعداد مختلط در نظر گرفتیم که فقط در حالت ویژه (وقتی بردارها روی محور Ax واقع یا با آن موازی‌اند) بصورت اعداد حقیقی جلوه‌گر میشوند. با گسترش اعمالی که روی بردارهای بر خط راست انجام میشد به بردارهای روی صفحه، ما اعمال جمع و ضرب (و سپس اعمال معکوس یعنی تفریق و تقسیم) را وارد بحث نموده و یقین حاصل کردیم که این اعمال نیز از همان قوانینی متابعت میکنند که اعمال روی اعداد حقیقی. ضمناً در مورد خود اعداد مختلط هیچ آگاهی نداریم جز اینکه همهٔ این اعداد بوسیلهٔ بردارها نمایش داده میشوند تازه هم بنحویکه هر دو بردار بطول مساوی، موازی با هم و همسو یک عدد مختلط را نمایش میدهند در صورتیکه بردارهای متفاوت از یکدیگر از نظر طول یا جهت، نمایشگر اعداد مختلف هستند. ما اطمینان حاصل کردیم که اعداد مختلط امکان میدهند از ۱- جذر گرفته شود و واحد موهومی i را بعنوان یکی از دو مقدار $\sqrt{-1}$ (آن مقدار جذر که آرگومان آن $+90^\circ$ است) وارد بحث نمودیم. بالاخره با تکیه بر قواعد اعمال روی اعداد مختلط، ما نشان دادیم که هر عدد مختلط c را میتوان بصورت $c = a + bi$ نمایش داد که a و b اعداد حقیقی هستند.

خلاصه، c مرکب است از دو جمعیدهٔ a و bi. یکی، a، بوسیلهٔ بردار محور حقیقی نمایش داده میشود و میتواند بعنوان حاصلضرب عدد حقیقی a در واحد حقیقی تلقی شود. دیگری، bi، بوسیلهٔ بردار محور موهومی نمایش داده میشود و میتواند بعنوان



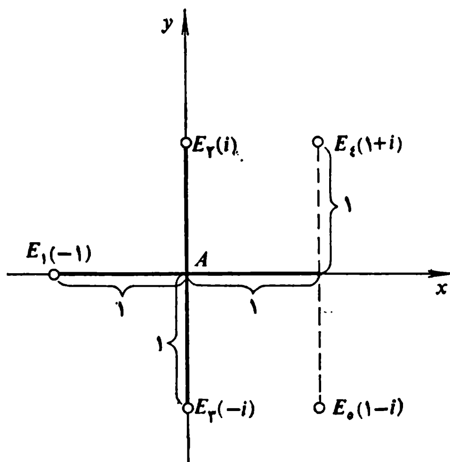
شکل ۱۶

حاصلضرب عدد حقیقی b در واحد موهومی i تلقی شود. چنین ترکیب هرگونه عدد مختلط امکان میدهد به چرائی نام ''مختلط،، (یعنی مرکب) پی ببریم.

یادآور میشویم که a را بخش حقیقی و b را بخش موهومی عدد c گویند. مثلا برای عدد $c = ۳ - ۲i$، بخش حقیقی برابر ۳، و بخش موهومی برابر ۲- است.

۱۴. اگر اعداد مختلط را بوسیلهٔ بردارهای دارای مبدأ مشترک در نقطهٔ A نمایش دهیم آنگاه با اعداد مختلط نامساوی، بردارهای غیر منطبق بر یکدیگر متناظر خواهند بود و برعکس: با بردارهای غیر منطبق بر یکدیگر، اعداد مختلط گوناگون متناظر خواهند بود. فرض کنیم $c = a + bi$. آنگاه انتهای بردار AE نمایشگر عدد c، دارای طول a و عرض b خواهد بود (شکل ۱۶).

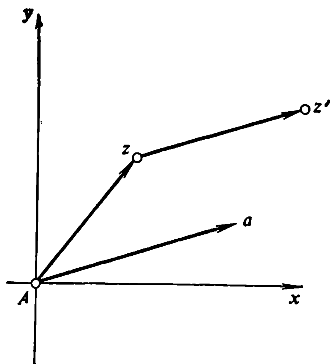
بدینترتیب، چنانچه مبدأ بردار نمایشگر عدد $c = a + bi$ را در مبدأ مختصات A قرار دهیم آنگاه اعداد a و b، مختتصات انتهای



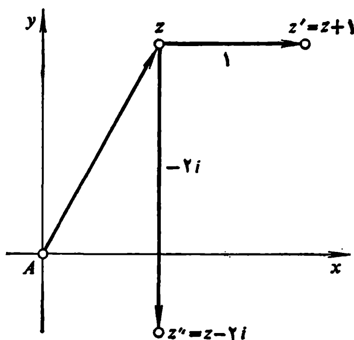
شکل ۱۷

این بردار خواهند بود. با استفاده از این ملاحظه میتوان عددهای مختلط را از طریق هندسی نه فقط بصورت بردارها بلکه بصورت نقاط نیز نمایش داد یعنی هر عدد مختلط $a+bi$ را میتوان تنها با یک نقطهٔ E بمختصات a و b نمایش داد و برعکس: هر نقطهٔ E' بمختصات a' و b' را میتوان نمایشگر عدد مختلط $a'+ib'$ در نظر گرفت. در شکل ۱۷، نقاط E_1، E_2، E_3، E_4 و E_5 ذکر گردیده که (بترتیب) نمایشگر اعداد زیر میباشند: ۱−، i، $-i$، $1+i$، $1-i$.

در آینده برای اختصار ما اغلب هم خود عدد z و هم نقطهٔ نمایشگر آن، E، را بطور یکسان، با عبارت ''نقطه z،، خواهیم نامید. مثلا عبارت ''نقطهٔ $1+i$،، هم بخود عدد $1+i$ و هم به نقطهٔ نمایشگر آن، E_4، اطلاق میشود (شکل ۱۷). از روی متن روشن خواهد بود کدام یک از این دو معنی بویژه در نظر است. راستی بهتر است عادت کنیم بتفکر در بارهٔ این موضوع نپرداخته و هر دو معنی را بطور مساوی بکار ببریم.



شکل ۱۸

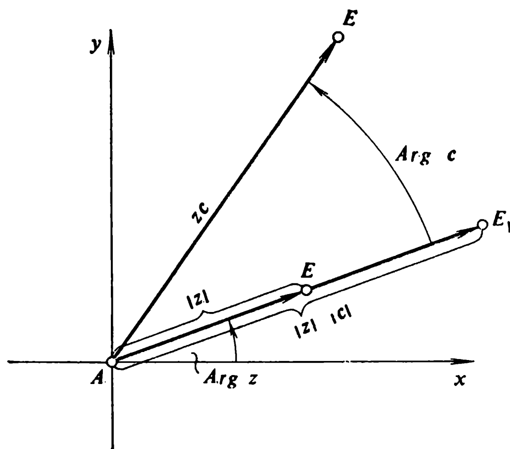


شکل ۱۹

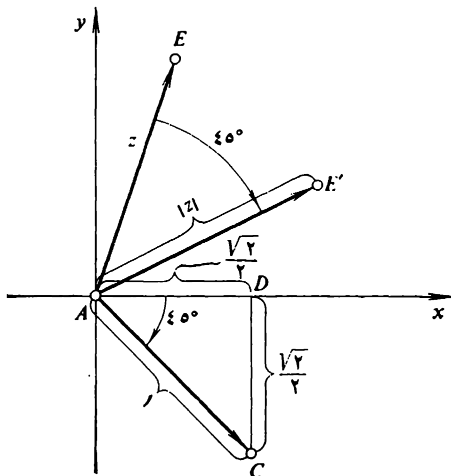
۱۵. یک نقطهٔ z مفروض است. اگر z را با یک عدد a جمع نمائیم نقطهٔ جدیدی، $z' = z + a$، بدست می‌آید. واضح است که رسیدن از نقطهٔ z به نقطهٔ z' از طریق جابجائی (یا انتقال) باندازهٔ بردار a میسر است یعنی از راه جابجائی نقطهٔ z در جهت بردار a بمسافت برابر با طول این بردار (شکل ۱۸). با انتخاب a ـ ی مناسب میتوان به جابجائی دلخواه نقطهٔ z دست یافت. مثلا اگر لازم شود نقطهٔ z در جهت مثبت محور Ax باندازهٔ واحد جابجا شود $a = ۱$ قرار میدهیم. نقطهٔ $z' = z + ۱$، نقطهٔ مطلوب خواهد بود. و اما اگر لازم باشد z در جهت منفی محور Ay باندازهٔ دو واحد انتقال یابد $a = -۲i$ قرار میدهیم. نقطهٔ $z'' = z + (-۲i) = z - ۲i$، نقطهٔ مطلوب خواهد بود (شکل ۱۹).

بدینترتیب، عمل جمع $z' = z + a$ از نظر هندسی بمعنی انتقال نقطهٔ z باندازهٔ بردار a میباشد.

۱۶. عمل ضرب z در یک عدد $c\neq ۰$ را در نظر میگیریم. برای ضرب z در c لازم است طول بردار AE (یعنی عدد $|z|$) در عدد $|c|$ ضرب، و بردار حاصل $AE_۱$ بزاویهٔ برابر با $\operatorname{Arg} c$ چرخیده شود (شکل ۲۰). عمل اول جهت بردار AE را تغییر نمیدهد و تنها طول آنرا میتواند تغییر دهد. بویژه اگر $|c|<۱$، این طول کاهش، و اگر $|c|>۱$، این طول افزایش می‌یابد و بالاخره اگر $c=۱$، بلاتغییر میماند. این عمل را <u>کشش</u> بردار AE باندازهٔ $|c|$ برابر نامگذاری میکنیم. برای کلمهٔ «کشش»، در اینجا باید معنی شرطی قائل شد. در واقع کشش فقط در ازای $|c|>۱$ وقتیکه طول بردار AE، در اثر ضرب، $|c|$ برابر میشود صورت میگیرد. لکن از همین لفظ هنگامی نیز استفاده خواهیم کرد که $|c|=۱$ (طول بردار AE بلاتغییر است) و $|c|<۱$ (طول بردار AE در اثر ضرب کاهش مییابد).



شکل ۲۰

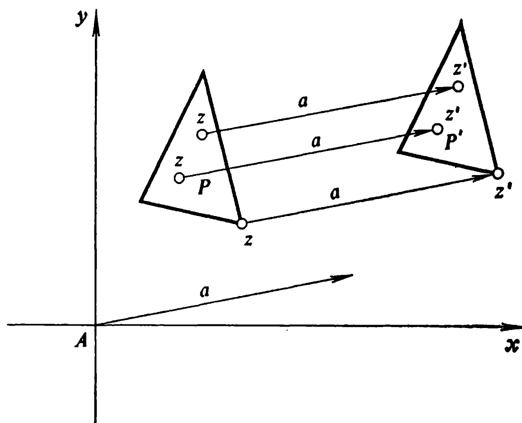


شکل ۲۱

اگر c عددی حقیقی و مثبت باشد آنگاه $\operatorname{Arg} c = 0$.

در اینصورت چرخش بزاویهٔ $\operatorname{Arg} c$، بردار AE_1 را که از طریق کشش حاصل شده تغییر نمیدهد. بنا بر این، نقطهٔ E_1 نمایشگر حاصلضرب zc است. میتوان گفت که ضرب z در عدد حقیقی مثبت c، از نظر هندسی، بمعنی کشش بردار AE (نمایشگر z) باندازهٔ c برابر است. با تغییر c میتوان به کشش‌های گوناگون بردار AE نائل آمد. مثلا برای کشش دو برابر، لازم است z در ۲ ضرب گردد. برای کشش $^2/_3$ برابر لازم است z در $^2/_3$ ضرب شود.

اگر سازهٔ c عدد حقیقی مثبتی نباشد آنگاه $\operatorname{Arg} c$ مخالف صفر است. در اینصورت ضرب z در c تنها به کشش بردار AE منتهی نمیگردد بلکه، بعلاوه، چرخش بردار کشش یافته را در حول نقطهٔ A بزاویهٔ $\operatorname{Arg} c$ لازم میدارد. بنا بر این، در حالت کلی، عمل



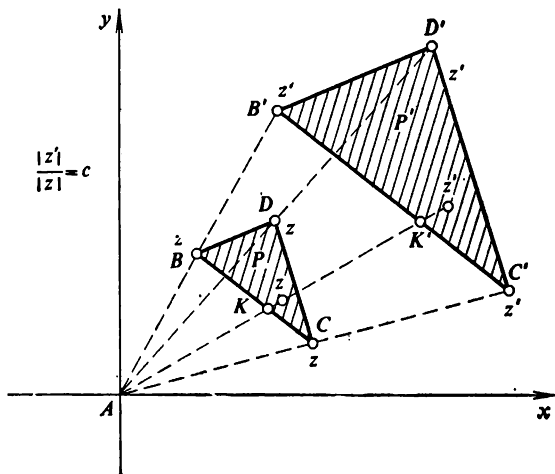
شکل ۲۲

ضرب c × z هم بمعنی کشش (|c| برابر) و هم بمعنی چرخش (بزاویهٔ $\operatorname{Arg} c$) میباشد. در حالت خاص وقتی قدر مطلق c برابر واحد است ضرب در c تنها به چرخش بردار AE بدور نقطهٔ A بزاویهٔ $\operatorname{Arg} c$ منتهی میگردد. با انتخاب c بطور مناسب، میتوان به چرخش AE بزاویهٔ دلخواه دست یافت. چنانکه مثلا اگر لازم باشد AE بزاویهٔ °۹۰ در جهت مثبت (خلاف گردش عقربهٔ ساعت) چرخیده شود کافی است z ضرب در i گردد. در واقع، $|i|=۱$ و $\operatorname{Arg} i=۹۰°$. برای چرخاندن AE بزاویهٔ °۴۵ در جهت منفی موافق گردش عقربهٔ ساعت کافی است z ضرب در عدد مختلط c گردد که مدول آن برابر واحد، و آرگومان برابر °۴۵- باشد. این عدد را بکمک شکل ۲۱ که نقطهٔ c نمایشگر عدد c در آن نشان داده شده بآسانی میتوان یافت. آشکار است که مختصات نقطه c چنین است: $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، $y=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. لذا $c=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=$

$= -i\frac{\sqrt{2}}{2}$. خلاصه، ضرب z در $c = \frac{\sqrt{2}}{2} = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$ معادل است با چرخش بردار AE (نمایشگر z) بدور نقطهٔ A به زاویهٔ 45° در جهت منفی.

۱۷. فرمولهای $z' = z + a$ یا $z' = cz$ چنانکه دیدیم نقطهٔ z را به نقطهٔ z' مبدل مینمایند. حال بجای یک نقطهٔ z، تعداد بی‌شمار نقاط z را که یک شکل هندسی P (مثلا مثلث، شکل ۲۲) را تشکیل میدهند بررسی میکنیم. اگر در مورد هر نقطهٔ z فرمول $z' = z + a$ را بکار ببریم آنگاه از هر نقطهٔ اولیه، نقطهٔ تازهٔ z' بدست می‌آید که باندازهٔ بردار a جابجا شده است. همگی این نقاط جابجا شده، یک شکل تازهٔ P' را تشکیل خواهند داد. واضح است که آنرا در صورتی میتوان بدست آورد که اگر تمام شکل P را بطور یکپارچه باندازهٔ بردار a جابجا نمائیم. بدینترتیب بوسیلهٔ فرمول $z' = z + a$ نه فقط یک نقطه بلکه یک شکل تمام (مجموعهٔ نقاط) را نیز میتوان تبدیل کرد. این تبدیل به جابجائی شکل باندازهٔ بردار a منتهی میگردد. البته که شکل تازه با شکل اولیه یکسان است.

۱۸. فرمول $z' = cz$ را میتوان در مورد هر نقطهٔ z از شکل P بکار برد. اگر c عددی حقیقی و مثبت باشد آنگاه هر نقطهٔ z از شکل P به نقطهٔ تازهٔ z' مبدل میگردد که بر همان شعاع خارج شده از A واقع است که نقطهٔ z نیز بر آن قرار دارد و ضمناً نسبت $\frac{|z'|}{|z|}$ (یعنی نسبت فواصل نقاط z' و z تا A) برابر c است. چنین تبدیلی در هندسه بنام همگذاری معروف است و نقاط z' و z، نقاط همگذارده، و نقطهٔ A مرکز همگذاری، و c ضریب همگذاری نامیده میشود.



شکل ۲۳

در اثر همگذاری، مجموعهٔ تمام نقاط شکل P به مجموعهٔ تازه‌ای از نقاط مبدل میگردد که شکل P' را تشکیل میدهند (شکل ۲۳). این شکل نسبت به شکل داده شدهٔ P همگذارده میباشد. بآسانی میتوان دید در حالتیکه P چندضلعی (مثلا مثلث) باشد شکل همگذاردهٔ P' نیز چندضلعی مشابه چندضلعی P است. برای اثبات این موضوع کافی است بررسی شود که نقاط واقع بر یکی از اضلاع چندضلعی P، مثلا BC، در اثر همگذاری به چه تبدیل میگردند (شکل ۲۳).

اگر B به B'، و C به C' تبدیل گردد آنگاه با وصل B' و C' بوسیلهٔ پاره‌خط راست پیدا میکنیم که مثلث‌های ABC و $AB'C'$ متشابه اند (زاویهٔ A مشترک، و پهلوهای آن متناسبند: $\left(\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=c\right)$. از اینجا هم‌چنین نتیجه میشود که ضلع $B'C'$ موازی BC، و $\frac{B'C'}{BC}=c$. نقطهٔ K را بر BC اختیار میکنیم. آنگاه شعاع AK در یک نقطهٔ

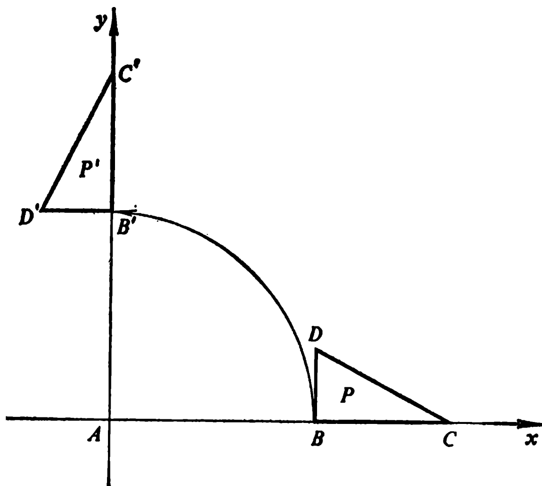
K'، $B'C'$ را تلاقی خواهد کرد و دوباره مثلث‌های AKC و $AK'C'$ متشابه خواهند بود و در نتیجه، $c = \frac{AC'}{AC} = \frac{AK'}{AK}$. بنا بر این، نقطهٔ K' نسبت به نقطهٔ K (نسبت به مرکز همگذاری A در ازای ضریب همگذاری برابر c) همگذارده خواهد بود. از اینجا نتیجه میگیریم که همهٔ نقاط واقع بر ضلع BC در اثر همگذاری به نقاط واقع بر ضلع $B'C'$ تبدیل میگردند. در ضمن، هر نقطهٔ $B'C'$ نسبت به یکی از نقاط واقع بر BC همگذارده خواهد بود. بدینترتیب تمام پاره‌خط $B'C'$ نسبت به پاره‌خط BC همگذارده خواهد بود. با تکرار این استدلال برای همهٔ اضلاع چندضلعی P درمی‌یابیم که همهٔ آنها به اضلاع چندضلعی جدید P' مبدل میگردند و ضمناً اضلاع متناظر جفت جفت موازی و نسبت طول آنها با یک عدد c برابر خواهد بود:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'B'}{DB} = c$$

بهمین ترتیب تشابه اشکال همگذاردهٔ P و P' باثبات رسیده است.

بدینترتیب بوسیلهٔ فرمول $z' = cz$ (c عددی است حقیقی و مثبت) میتوان نه فقط یک نقطه بلکه یک شکل تمام P را نیز تبدیل نمود. این نوع تبدیل، همگذاری بمرکز A و بضریب برابر c است. در حالتیکه P چندضلعی باشد شکل تبدیل شدهٔ P' نیز چندضلعی مشابه P است.

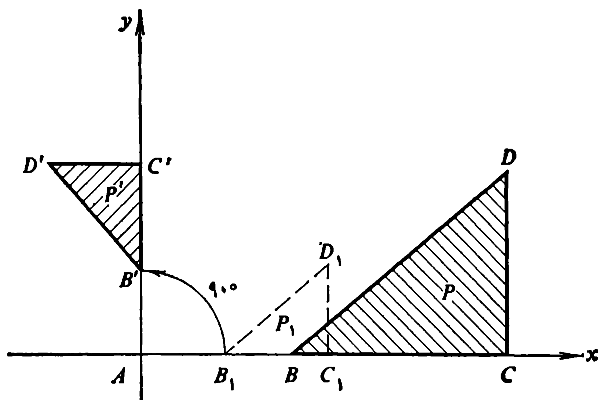
۱۹. حال فرض کنیم که عدد c در فرمول $z' = cz$ عدد مثبتی نباشد. اول $|c| = 1$ قرار میدهیم. در اینصورت تمام عمل ضرب به چرخش بردار Az بدور نقطهٔ A بزاویهٔ برابر آرگومان z منتهی میشود. اگر این عمل را در مورد هر نقطهٔ z شکل P انجام دهیم



شکل ۲۴

آنگاه تمام شکل P بزاویهٔ $\operatorname{Arg} c$ بدور نقطهٔ A چرخیده خواهد شد. نتیجه اینکه بوسیلهٔ فرمول $z' = cz$ که در آن ۱ $= |c|$، هرگونه شکل P به شکل P' از طریق چرخش در حول نقطهٔ A بزاویهٔ $\operatorname{Arg} c$ تبدیل میگردد. مثلا $c = i$ قرار میدهیم. نظر به اینکه $\operatorname{Arg} i =$ ۹۰°، تبدیل $z' = iz$ به چرخش شکل A بزاویهٔ ۹۰° در حول نقطهٔ A منتهی میگردد. در شکل ۲۴ نتیجهٔ این تبدیل مثلث نشان داده شده است.

اگر در فرمول $z' = cz$ شرط ۱ $= |c|$ را منظور نکرده بلکه c را بطور ساده یک عدد مختلط (نامثبت و مخالف صفر) بشماریم در اینصورت تبدیل مربوطهٔ شکل P را میتوان در دو مرحله انجام داد. اول کششی باندازهٔ $|c|$ برابر انجام میشود که در نتیجهٔ آن شکل P به شکل همگذاردهٔ P_1 تبدیل میگردد و سپس P_1 بدور نقطهٔ A بزاویهٔ $\operatorname{Arg} c$ چرخیده میشود.



شکل ۲۵

در شکل ۲۵، نتیجهٔ تبدیل مثلث P بروش $z' = \frac{i}{۲} z$ (در اینجا $\left|\frac{i}{۲}\right| = \frac{۱}{۲}$ و $\text{Arg}\frac{i}{۲} = ۹۰^\circ$) نشان داده شده است.

۲۰. در فرمولهای $z' = z + a$ و $z' = cz$ میتوان z را بعنوان متغیر مستقل و z' را بعنوان تابع تلقی نمود. اینها ساده‌ترین توابع متغیر مختلط z می‌باشند. با انجام اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و بتوان رساندن (که آنرا بعنوان ضرب مکرر در نظر میگیریم) روی z و اعداد مختلط ثابتی، توابع گوناگون دیگری از z را بدست می‌آوریم مثلا

$$z' = \frac{۱}{z} \quad \text{یا} \quad z' = z^{۲} + cz + d \quad \text{یا} \quad z' = \frac{z-a}{z-b} \quad \text{و غیره.}$$

همهٔ چنین توابعی از متغیر مختلط بنام ”گویا“ نامیده میشوند و

این نام را مدیون نامی هستیم که به خود اعمال تعیین کنندهٔ این توابع (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) اطلاق میشود یعنی اعمال گویا. همهٔ توابع متغیر مختلط در زمرهٔ توابع گویا نمی‌گنجند. مثلا میتوان توابعی از قبیل $z'=\sqrt[n]{z}$، $z'=a^z$، $z'=\sin z$ و غیره را تعیین، و مورد مطالعه قرار داد. اما در چارچوب این کتاب ما فقط به توابع گویا، تازه هم ساده‌ترین آنها بسنده می‌کنیم.

۲۱. ما دیدیم که با توابع $z'=z+a$ یا $z''=cz$، تبدیلات هندسی معینی در مورد اشکال روی صفحه متناظر است. بویژه اگر متغیر z نقاط شکل P را بپیماید آنگاه تابع $z'=z+a$ نقاط شکل P' را که از طریق جابجائی باندازهٔ بردار a از P بدست می‌آید میپماید و تابع $z''=cz$ نقاط شکل P'' را که با تبدیل همگذاری بضریب c و چرخش بدور نقطهٔ A بزاویهٔ $\operatorname{Arg} c$ از P بدست می‌آید میپیماید. در نتیجه میتوان گفت که خود تابع $z'=z+a$ تبدیل جابجائی را، و تابع $z''=cz$ تبدیل همگذاری و چرخش را انجام میدهد (اگر c عددی حقیقی و مثبت باشد آنگاه تمام قضیه تنها به همگذاری، و اگر $|c|=۱$ ولی $c\neq۱$ آنگاه تنها به چرخش منتهی میگردد). این سوٴال پیش می‌آید که در مورد تبدیلات تولید شده توسط دیگر توابع متغیر مختلط و بویژه توسط توابع گویا چه میتوان گفت. همین مسئله است که مارا در صفحات بعدی کتاب به خود مشغول خواهد داشت. اما برای اینکه خواننده بفهمد که چنین اشتغالی وقتگذرانی محض نیست همینجا وی را آگاه میسازیم از اینکه تبدیلات تولید شده توسط توابع گویای متغیر مختلط، با تمام تنوع و غناء شگفت‌انگیز خواص هندسی، دارای وجه مشترکی نیز هستند و آن اینکه هرچند در ضمن این تبدیلات ، اندازه و ظاهر

شکل، بطور اعم، تغییر می‌یابد ولی مقدار زوایای بین هرگونه خطوط متعلق به شکل مورد نظر بلاتغییر می‌ماند*.

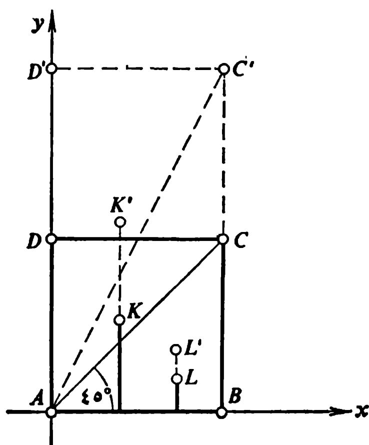
در حالات خاص توابع $z' = z + a$ یا $z' = cz$ عدم تغییر زوایای اشکال مورد تبدیل مستقیماً از تبدیلات جابجائی، همگذاری و چرخش سرچشمه میگیرد. این نکته جالب توجه است که همین پدیده همچنین در تبدیلات بوسیلهٔ هرگونه توابع گویای متغیر مختلط و نیز تعداد زیادی توابع کلی‌تر و پیچیده‌تر متغیر مختلط موسوم به توابع تحلیلی مشاهده میشود. اما موضوع اخیرالذکر از حوصلهٔ این جزوه بیرون است.

۲۲. تبدیلات هندسی که موجب تغییر زاویهٔ بین هر جفت خط در شکل مورد تبدیل نمیگردد بنام تبدیلات متشابه‌الزاویه یا بیشتر بنام بازتاب‌های متشابه‌الزاویه موسوم است.

جابجائی، همگذاری و چرخش که در فوق از نظرمان گذشت در شمار مثالهای بازتاب‌های متشابه‌الزاویه میباشد. مثالهای دیگری را در زیر می‌آوریم. و اما اکنون نشان میدهیم شرط عدم تغییر زاویهٔ بین هر جفت خط متعلق به شکل مورد نظر که در تعریف بازتاب متشابه‌الزاویه منظور گشته چه معنی دارد. مربع $ABCD$ را که دو ضلع آن بر محورهای Ay و Ax منطبق هستند در نظر میگیریم (شکل ۲۶). آنرا طوری به شکل دیگری تبدیل میکنیم که طول x هر نقطه بلاتغییر مانده و عرض y دو برابر گردد. آنگاه

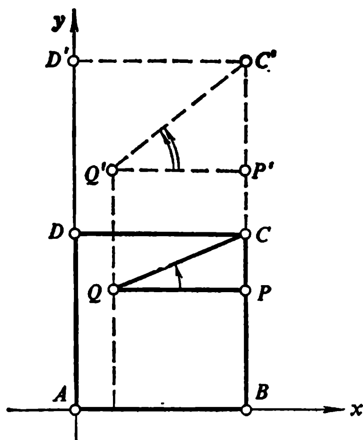
---

* اگر دقیقتر بگوئیم در اینجا نقاط علیحده‌ای ممکن است موجود باشند چنانکه زوایای برأس در این نقاط تغییر بیابند و ۲، ۳ و یا، بطور کلی، تعداد صحیح بار افزایش یابند. لکن چنین نقاطی فقط استثنائی از قاعدهٔ عمومی میباشند.



شکل ۲۶

مثلا نقطهٔ K به K'، و L به L' تبدیل میگردد. اگر همهٔ نقاط مربع را از این راه تبدیل نمائیم آنگاه بدیهی است که مربع $ABCD$ به مربع مستطیل $ABC'D'$ بهمان قاعده و ارتفاع مضاعف تبدیل خواهد شد. در ضمن ضلع AB تبدیل به خود میشود (همهٔ نقاط بر جای میمانند چون عرض آنها مساوی صفر بوده و بعد از مضاعف شدن نیز مساوی صفر میماند)، AD به AD'، DC به $D'C'$، و BC به BC' مبدل میگردد. البته که زاویهٔ بین اضلاع که قائمه بوده همچنان قائمه میماند یعنی تغییری نمی نماید. و اما زاویهٔ BAC بین ضلع AB و قطر AC مربع مورد نظر را بررسی میکنیم (شکل ۲۶). این زاویه برابر ۴۵° است. در اثر تبدیل، ضلع AB بر جای میماند ولی خط AC به خط AC' تبدیل میگردد (چرا؟) . نتیجه اینکه زاویهٔ BAC به زاویهٔ دیگری (بزرگتری)، BAC'، تبدیل میگردد یعنی بلاتغییر نمی‌ماند. اگر بجای زاویهٔ BAC، زاویهٔ PQC را براًس در نقطهٔ دیگری از مربع $ABCD$، مثلا در نقطهٔ Q، در نظر بگیریم



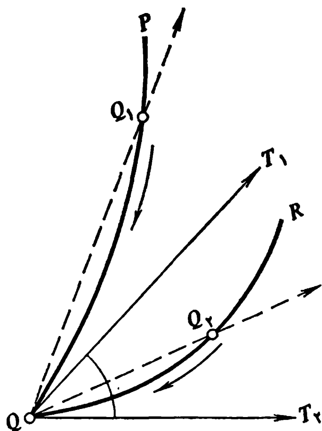
شکل ۲۷

(شکل ۲۷) بآسانی میتوان نشان داد که این زاویه هم در اثر تبدیل مورد نظر تغییر خواهد کرد.

از همهٔ این مراتب نتیجه میشود: با اینکه زوایای خود چهارضلعی $ABCD$ در اثر تبدیل مورد نظر تغییر نکرده (چنانکه بوده یعنی قائمه مانده)، این تبدیل متشابه‌الزاویه نیست چونکه برای هر نقطهٔ متعلق به $ABCD$ میتوان زاویه‌ای برأس در این نقطه نشان داد که در اثر این تبدیل تغییر می‌کند (بزرگ میشود).

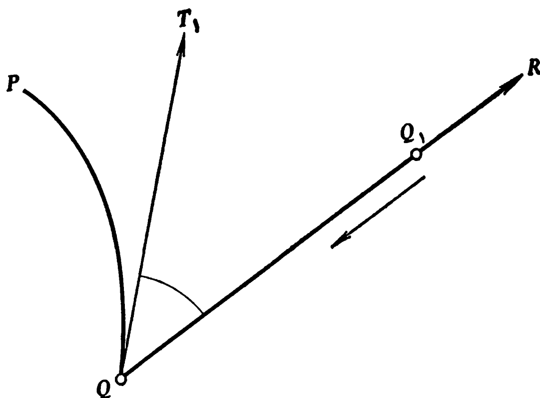
۲۳. قبل از اینکه جلو برویم لازم است به خواننده توضیح دهیم منظور از زاویهٔ بین دو خط منحنی QR و QP متلاقی در یک نقطهٔ Q (شکل ۲۸) چیست.

یک نقطهٔ Q_1 متفاوت از Q را روی منحنی QP اختیار، و خط قاطع QQ_1 را عبور میدهیم. بطور کاملا مشابه، نقطهٔ Q_2 متفاوت از Q را روی منحنی QR اختیار، و قاطع QQ_2 را عبور میدهیم.



شکل ۲۸

اندازهٔ زاویهٔ Q_1QQ_2 را میتوان بعنوان مقدار تقریبی زاویهٔ منحنی‌الخط PQR در نظر گرفت. هر قدر نقاط Q_1 و Q_2 به نقطهٔ Q نزدیکتر باشند همانقدر قاطع‌ها نزدیکتر به پهلوی منحنی‌های QP و QR در حوالی نقطهٔ Q قرار خواهند گرفت. بنا بر این، زاویهٔ Q_1QQ_2 را نیز در اینصورت میتوان بعنوان تقریب هر چه تمامتر مقدار زاویهٔ بین منحنی‌هایمان در نقطهٔ Q در نظر گرفت. چنانچه Q_1 بر روی منحنی QP، و Q_2 بر روی منحنی QR هر چه نزدیکتر به Q جابجا شوند قاطع‌های QQ_1 و QQ_2 همانقدر بیشتر در حول نقطهٔ Q دوران یافته و به مواضع حد QT_1 و QT_2 نزدیک خواهند شد. شعاع‌های QT_1 و QT_2 از همهٔ دیگر شعاع‌های مار بر Q به پهلوی منحنی‌هایمان در حوالی این نقطه نزدیکتر قرار می گیرند. آنها نامزد به مماس بر منحنی‌های QP و QR بوده و زاویهٔ T_1QT_2 بین آنها بعنوان میزان زاویهٔ بین منحنی‌های QP و QR در نقطهٔ Q پذیرفته میشود. بدینترتیب زاویه بین دو منحنی متلاقی در یک



شکل ۲۹

نقطه، زاویهٔ بین مماس‌هائی بر منحنی‌هاست که از این نقطه گذرانده شده‌اند.

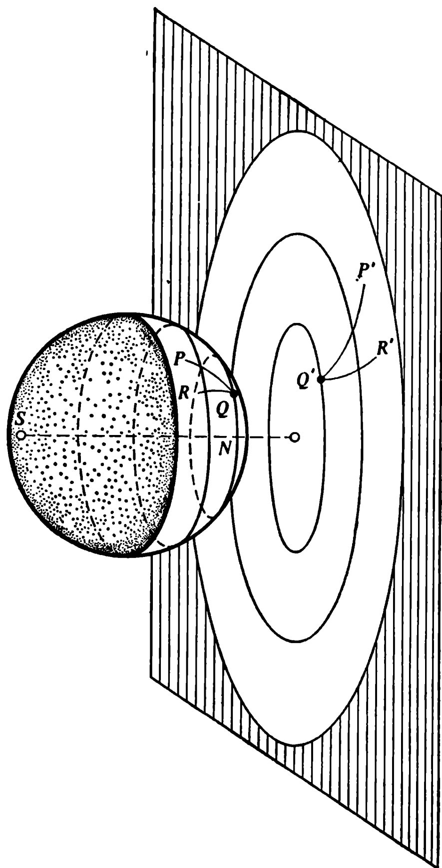
این تعریف همچنین در مورد زاویهٔ بین یک منحنی QP و خط راست QR در نقطهٔ Q قابل کاربرد است (شکل ۲۹). فرض کنیم QT_1 مماسی بر QP در نقطهٔ Q باشد. برای بهره‌گیری از تعریف، خط راست QR را نیز باید با مماس بر این خط راست عوض نمود. اما بآسانی میتوان دریافت که مماس بر خط راست QR بر خود این خط راست منطبق است. در واقع، برای بدست آوردن خط قاطع، بایستی نقطهٔ Q_1 متفاوت از Q را روی QR اختیار نموده و خط راستی از Q و Q_1 عبور داد. بدیهی است که آن، همان خط راست QR است. اگر Q_1 به Q نزدیک شود در آنصورت قاطع بدست آمده بلاتغییر می ماند. لذا مماس که خود، قاطعی در وضع حد میباشد باز هم خط راست QR می باشد. نتیجتاً زاویهٔ بین منحنی QP و خط راست QR را باید بمثابهٔ زاویهٔ بین مماس QT_1 بر منحنی QP

در نقطهٔ Q و خود خط راست QR معنی کرد. ممکن است چنین اتفاق افتد که همانا QR مماس بر QP باشد (یعنی QR بر QT_1 منطبق باشد)، آنگاه زاویهٔ بین QR و QP تبدیل به صفر میگردد. بنا بر این در نقطهٔ Q، زاویهٔ بین منحنی و مماس بر آن در همین نقطه برابر صفر است.

۲٤. بازتاب‌های متشابه‌الزاویه کاربردهای زیادی دارند. آنها مثلا در نقشه‌برداری در امور تهیهٔ نقشه‌های جغرافیائی بکار میروند.

هر نقشهٔ جغرافیائی قسمتی از رویهٔ زمین را در صفحه (در برگ کاغذ) نمایش میدهد. در چنین نمایشی خطوط قاره‌ها، دریاها و اقیانوس‌ها کم و بیش تحریف پیدا میکند. خواننده بآسانی یقین خواهد نمود که نمیشود قسمتی از رویهٔ کره (مثلا پاره‌ای از توپ شکستهٔ پینگ پنگ) را بر روی صفحه گسترانده و بدون کشش و تراکم، بدون پارگی و چروکیدگی هموار ساخت. بهمین لحاظ هم نمیتوان قسمتی از رویهٔ زمین را (که میتوان آنرا کروی تلقی کرد) بدون بر هم خوردن تناسب و، در نتیجه، بدون تحریف شکل آن روی صفحه ترسیم نمود یعنی نقشه ترسیم کرد. و اما معلوم میشود که میتوان نقشه ترسیم نمود بدون آنکه زاویهٔ بین خطوط گوناگون در روی زمین تغییر کند.

فرض کنیم لازم باشد نقشهٔ نیمکرهٔ شمالی ترسیم شود بنحویکه در آن تمام زوایا بین جهات مختلف بر روی زمین باندازهٔ طبیعی تصویر گردد. برای اینکه تصور بهتری از نحوهٔ این کار پیدا کنید یک کرهٔ بزرگ جغرافیا از مادهٔ شفافی مثلا از شیشه را در نظرتان مجسم کنید که رنگ‌آمیزی آن بگونه‌ای باشد که فقط خطوط قاره‌ها، کشورها و دریاها در نیمکرهٔ شمالی و نیز شبکهٔ نصف‌النهارات و مدارات بی‌رنگ و، در نتیجه، شفاف بماند و بقیه از رنگ کدر



شکل ۳۰

پوشیده باشد. اگر در قطب جنوبی کرهٔ جغرافیا یک لامپ برقی کوچک ولی پرنور لحیم شود و پرده‌ای قایم بر محور آن قرار داده شود آنگاه در اطاق تاریک، نقشهٔ محیط‌نمای نیمکرهٔ شمالی را روی

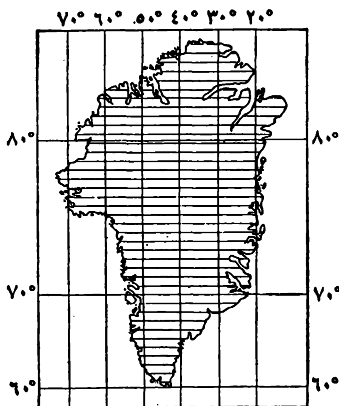
پرده مشاهده خواهیم نمود. از طریق هندسی میتوان ثابت کرد که در چنین نقشه‌ای (که بنام نقشهٔ تصویر کروی* معروف است) تمام زوایا بین هرگونه خطوطی روی کرهٔ جغرافیا در نیمکرهٔ شمالی باندازهٔ طبیعی تصویر میگردد.

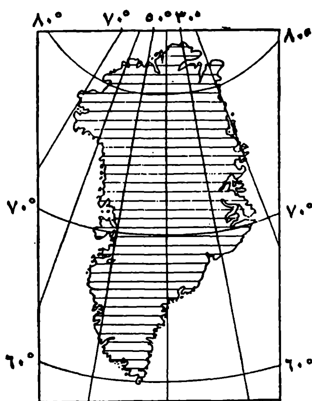
اگر اضلاع (منحنی الخط) یک زاویهٔ PQR برأس در نقطهٔ دلخواه نیمکرهٔ شمالی را بی‌رنگ بگذاریم آنگاه در تصویر کروی، این زاویه باندازهٔ طبیعی تصویر میشود (شکل ۳۰).

۲۵. در بالا طریقهٔ تهیهٔ نقشهٔ نیمکرهٔ شمالی با حفظ اندازهٔ طبیعی همهٔ زوایا را شرح دادیم. اگر منبع نور (لامپ) صادر کنندهٔ شعاع های تصویر کننده را نه در قطب جنوبی بلکه در قطب شمالی قرار دهیم میتوانیم با همان روش نقشهٔ نیمکرهٔ جنوبی را با حفظ اندازهٔ طبیعی همهٔ زوایا تهیه نمائیم. هر یک از نقشه‌هائیکه از این طریق بدست آمده از یک شکل مسطح عبارت است. اگر آن را مورد تبدیل متشابه‌الزاویه قرار دهیم به شکل جدیدی در می آید که آنرا نیز میتوان بعنوان نقشهٔ جغرافیائی تلقی نمود. از آنجا که در بازتاب متشابه‌الزاویه، زوایا تغییر نمیکند در نقشهٔ جدید اندازهٔ زوایا بین جهات بر روی زمین حفظ می شود. در طرف راست شکل ۳۱، نقشهٔ تصویر کروی گرونلند، و در طرف چپ، نقشه‌ایکه

---

* تصویر کروی تصویر کره است که از راه زیر حاصل میشود: نقطه‌ای بر روی یک کره اختیار نموده و قطر را از آن عبور میدهیم، سپس از انتهای مقابلش صفحه‌ای عمود بر قطر و مماس بر کره را که صفحهٔ تصویر نام دارد میگذرانیم. شعاع های خارج شده از نقطهٔ اولی، تصویر کره و همهٔ جزئیات سطحش را بر صفحهٔ مذکور میاندازند (مترجم).





شکل ۳۱

از نقشهٔ اول در اثر تبدیل طبق فرمول

$$z' = \log_e |z| + i \operatorname{Arg} z$$

بدست می‌آید نمایش داده شده است. در اینجا بمثابهٔ پایهٔ لگاریتم، عددی بنام عدد نپر ... ۲٫۷۱۸۲۸ $= e$ انتخاب شده و $\operatorname{Arg} z$ بجای درجه به رادیان اندازه‌گیری میشود.

بدون شک این فرمول، بغرنج و من درآوردی بنظر میرسد. بررسی آن از حوصلهٔ این کتاب خارج است و لذا نمیتوانیم تحقیق کنیم که آیا تبدیلی که طبق آن انجام میگردد در واقع تبدیلی است متشابه‌الزاویه یا نه. فقط باین گفته بسنده میکنیم که نقشهٔ ناشی از چنین تبدیلی قریب ۴۰۰ سال پیش باهتمام مرکاتور دانشمند هلندی تهیه گردید. از آن ببعد این نقشه در دریانوردی رواج بسزائی یافته است. مزیت آن بر نقشهٔ تصویر کروی عبارتست از اینکه نه فقط نصف‌النهارات بلکه مدارات نیز در آن بصورت خطوط راست میباشند. علاوه بر این،

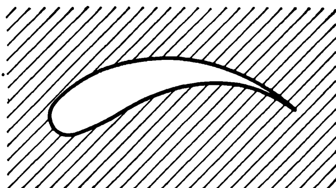
هر گونه مسیری بر روی زمین که عقربهٔ قطب‌نما در امتداد آن تغییر جهت نمیدهد (باصطلاح، لوکسودرومیا) در این نقشه بصورت خط راست است.

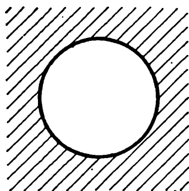
۲۶. مهمترین کاربردهای بازتاب‌های متشابه‌الزاویه به مسایل فیزیک و مکانیک مربوط است. در بسیاری از مسایل مثلا مسایل دایر بر اختلاف سطح الکتریکی در نقاط فضای اطراف خازن باردار یا درجهٔ حرارت داخل جسم گرم، سرعت ذره‌های مایع یا گاز جاری در اطراف موانعی در یک مجراء و امثال آن لازم می‌آید اختلاف سطح، درجهٔ حرارت، سرعتها و غیره محاسبه شود. چنین مسایلی را در صورتی میتوان بدون اشکال زیاد حل نمود که اجسام موضوع، شکل خیلی ساده‌ای داشته باشند (مثلا صفحهٔ مسطح یا استوانهٔ مستدیر). و اما در بسیاری موارد دیگر هم باید توانائی این محاسبه را داشت. مثلا برای محاسبهٔ هواپیما در جریان طراحی باید چگونگی محاسبهٔ سرعت ذرات هوای جاری از اطراف بال هواپیما را دانست*.

مقطع عرضی بال هواپیما (پروفیل بال) مانند شکل ۳۲، الف است. اتفاقاً محاسبهٔ سرعتها در حالتی که مقطع عرضی جسم غوطه‌ور در جریان، دایره باشد (یعنی خود جسم استوانه‌ای‌شکل باشد) بویژه ساده است (شکل ۳۲، ب).

---

* البته هنگام پرواز هواپیما هم ذرات هوا، هم خود بال حرکت میکنند. و اما با تکیه بر قوانین مکانیک میتوان تمام این پژوهش را در حالتی خلاصه نمود که بال ثابت، و جریان هوا بروی آن تاخته و از اطرافش جاری باشد.





شکل ۳۲ أ ب

پس معلوم میشود برای تحویل مسئلهٔ سرعت ذرات جریان هوای جاری از اطراف بال هواپیما به مسئلهٔ ساده‌تر جریان در اطراف استوانهٔ مستدیر کافی است شکل هاشوری شکل ۳۲، الف (پیرامون پروفیل بال) به شکل هاشوری شکل ۳۲، ب (پیرامون دایره) بطور متشابه‌الزاویه بازتاب گردد. چنین بازتابی بکمک تابعی از متغیر مختلط صورت میگیرد. علم باین تابع امکان میدهد انتقالی از سرعتها در جریان جاری در اطراف استوانهٔ مستدیر به سرعتها در جریان جاری از اطراف بال هواپیما انجام داده و نتیجتاً مسئلهٔ مطرح شده را تمام و کمال حل نمائیم.

بگونهٔ همانندی، بازتاب متشابه‌الزاویه امکان میدهد حل مسایل مربوط به محاسبهٔ اختلاف سطح الکتریکی و درجهٔ حرارت‌ها را از حالت اجسام با شکل دلخواه (شکل دلخواه مقطع عرضی) به ساده‌ترین حالتهائی که جواب مسئله معلوم است موکول نمائیم. بازگشت به فضای محیط بر اجسام باردار (یا گرم) اولیه بکمک همان تابع متغیر مختلط صورت میگیرد که بازتاب متشابه‌الزاویه را فراهم میسازد.

۲۷. هر آنچه که از کاربرد بازتاب متشابه‌الزاویه در زمینهٔ مسایل نقشه‌برداری، مکانیک و فیزیک گفته شد بدون اثبات بود. در این کتاب ما نمیتوانیم به اثبات مطالب دست بزنیم چون برای

فهم آنها خواننده بایستی بر دانشی مسلط باشد که کسب آن فقط در چهاردیواری مدارس عالی میسر است.

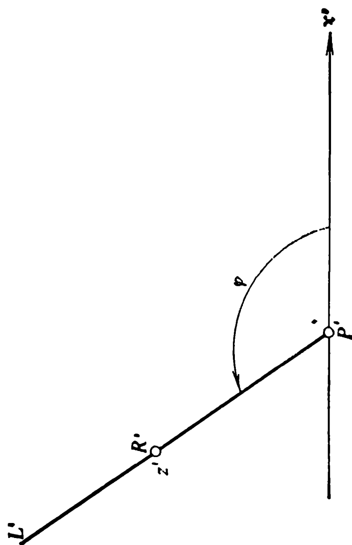
از همینجا تا پایان کتاب ما به ساده‌ترین توابع گویائی مشغول میشویم که بکمک آنها بتوان برخی بازتاب‌های متشابه‌الزاویه را انجام داد. اینک توابع موضوع بحث را نام میبریم: ۱) $z'=\frac{z-a}{z-b}$ (مصطلح به تابع کسری خطی)؛ ۲) $z'=z^2$؛ ۳) $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

تابع اخیرالذکر بنام دانشمند مشهور روس، ن. ی. ژوکفسکی (۱۸۴۷ — ۱۹۲۱)، معروف است که و. ای. لنین بحق وی را پدر هواپیمائی روسی نامیده است. این تابع بنام ژوکفسکی نامیده میشود چونکه وی با موفقیت آنرا در حل بعضی مسایل نظریهٔ هواپیما بکار برده است. او بویژه نشان داده است چگونه بکمک این تابع میتوان بعضی پروفیل‌های بال هواپیما را بدست آورد که هم اهمیت نظری و هم اهمیت عملی را دارا میباشند.

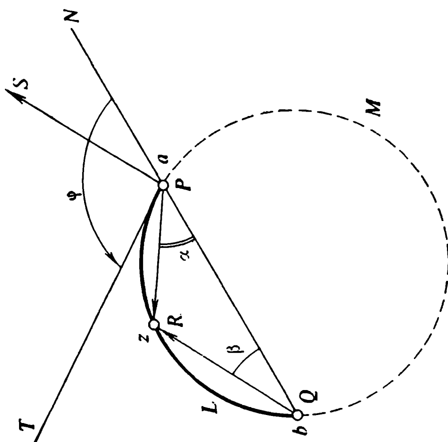
این کاربرد تابع ژوکفسکی را ما در صفحات بعدی شرح خواهیم داد.

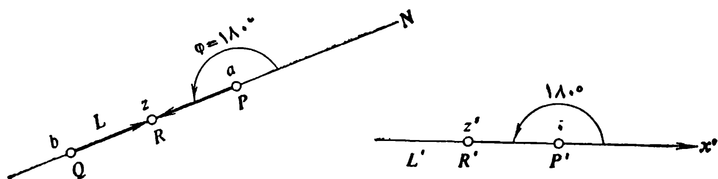
۲۸. بررسی را با تابع کسری خطی $z'=\frac{z-a}{z-b}$ آغاز مینمائیم. در اینجا a و b اعداد مختلط نابرابر هستند. نشان می دهیم که بکمک این تابع، هر کمان PLQ دایره که نقاط a و b را به هم وصل نموده به یک شعاع مستقیم‌الخط $P'L'$ خارج شده از مبدأ مختصات تبدیل میشود، در ضمن زاویهٔ بین جهت مثبت محور حقیقی و این شعاع برابر است با زاویهٔ بین جهت baN و مماس بر کمان دایره در نقطهٔ a (شکل ۳۳).

نقطهٔ z بر کمان PLQ مفروض است (شکل ۳۳، طرف چپ).



شکل ۲۳





شکل ۳۴

ثابت کنیم که سیمای آن (یعنی نقطهٔ متناظر آن، $z' = \frac{z-a}{z-b}$) باید بر شعاع $P'L'$ واقع باشد (شکل ۳۳، طرف راست). برای رسم بردار z' باید طول آن ($|z'|$) و زاویهٔ میل به قسمت مثبت محور حقیقی ($\text{Arg}\, z'$) را دانست. اما z' خارجقسمت اعداد مختلط $z-a$ و $z-b$ است که بوسیلهٔ بردارهای PR و QR نمایش داده میشوند. لذا $|z'| = \frac{|z-a|}{|z-b|}$ و $\text{Arg}\, z'$ برابر است با زاویهٔ SPR (بردارهای PS و QR برابرند) که از PS بسوی PR حساب میشود. بدیهی است که $\widehat{SPR} = \widehat{QRP}$* و لذا با نیمهٔ کمان QMP اندازه‌گیری میشود. زاویهٔ NPT نیز با نیمهٔ همین کمان اندازه گیری میشود.

بنا بر این، $\text{Arg}\, z' = \widehat{SPR} = \widehat{QRP} = \widehat{NPT} = \varphi$. بدین ترتیب، نقاط z بر کمان PLQ هر وضعی را داشته باشند نقاط متناظر، $z' = \frac{z-a}{z-b}$، دارای همان آرگومان φ میباشند و این بدان معنی است که تمام این نقاط بر همان شعاع $P'L'$ واقع اند که نسبت به قسمت مثبت محور حقیقی تحت زاویهٔ φ مایل است.

---

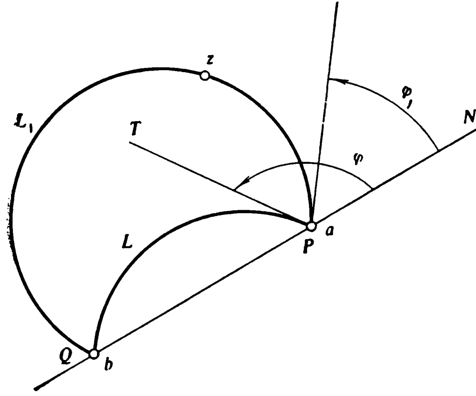
* نگارش $\widehat{ABC}$ بمعنی زاویهٔ ABC است.

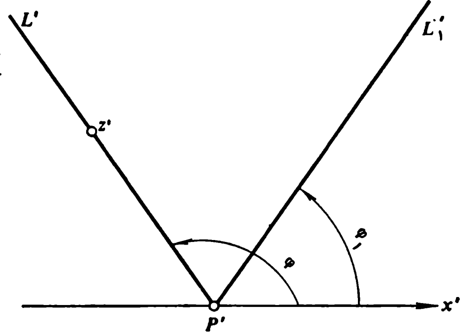
این نتیجه‌گیری در حالتی هم صادق است که PLQ نه کمان دایره بلکه پاره‌خط راست PQ باشد. در اینصورت باید $\varphi = ۱۸۰^\circ$ دانست و شعاع $P'L'$ را منطبق بر بخش منفی محور حقیقی شمرد (شکل ۳۴). در واقع، چنانچه z بر پاره‌خط PQ واقع باشد بردارهای نمایشگر $z-a$ و $z-b$ در جهات مخالف هم متوجه‌اند. از اینجا نتیجه میشود که خارجقسمت $z' = \frac{z-a}{z-b}$ عددیست حقیقی و منفی یعنی z' بر قسمت منفی محور حقیقی واقع است.

ما ثابت کردیم که سیماهای نقاط کمان PLQ بر شعاع $P'L'$ واقع‌اند. ولی آیا آنها تمام شعاع $P'L'$ را پر کرده‌اند یا بر روی آن نقاطی هست که سیمای هیچ نقطه‌ای از نقاط کمان PLQ نمی باشد؟ نشان میدهیم که سیماها تمام شعاع را پر کرده‌اند.

با نقطهٔ P' (مبدأ مختصات) شروع میکنیم. این نقطه سیمای نقطهٔ P میباشد چون $z' = \frac{z-a}{z-b}$ در ازاء $z = a$ صفر میگردد. یک نقطهٔ z' مخالف P' (یعنی $z' \neq ۰$) را بر شعاع $P'L'$ (شکل ۳۵) اختیار می کنیم. واضح است که z' نمیتواند عدد حقیقی مثبتی باشد چونکه شعاع $P'L'$ بر بخش مثبت محور حقیقی منطبق نیست.

با مجهول دانستن z، معادلهٔ $z' = \frac{z-a}{z-b}$ را نسبت به z حل میکنیم. پیدا میکنیم $zz' - z'b = z - a$ و از اینجا $z = \frac{z'b - a}{z' - ۱}$. بدینترتیب برای هر نقطهٔ z' واقع بر $P'L'$ یک و تنها یک مقدار z وجود دارد چنانکه $z' = \frac{z-a}{z-b}$ یعنی z' سیمای z میباشد. اما این نقطهٔ z کجا واقع است؟ آیا ممکن است که بر PLQ واقع نباشد؟ یقین حاصل میکنیم که چنین امری ممکن نیست. قبل از هر چیز، نقطهٔ z نمیتواند بر خط راستی واقع باشد که دنبالهٔ پاره‌خط PQ میباشد (بیرون از این پاره‌خط). در غیر این صورت اعداد $z-a$ و





شکل ۳۵

$z-b$ دارای آرگومان‌های یکسان میبود و $z'=\frac{z-a}{z-b}$ عددی مثبت میبود. ولی اگر z بر روی خط راست مذکور بیرون از پاره‌خط PQ واقع نبوده آنگاه میتوان P و Q را بوسیلهٔ کمان دایره بنحوی متصل نمود که این کمان از z عبور کند (اگر فرض شود که نقطهٔ z بر پاره‌خط PQ واقع باشد در آنصورت بجای کمان باید خود این پاره‌خط را اختیار نمود). این کمان را به PL_1Q نمایش می دهیم. چون آن بفرض ما مخالف PLQ است لذا مماس بر آن در نقطهٔ P با جهت baN زاویهٔ φ_1 مخالف φ را تشکیل میدهد (شکل ۳۵). بنا بر این، مقدار تابع $z'=\frac{z-a}{z-b}$ در این نقطه باید بوسیلهٔ نقطهٔ شعاع $P'L'_1$ نمایش داده شود که تحت زاویهٔ φ_1 به بخش مثبت محور حقیقی مایل بوده و در نتیجه بر $P'L'$ منطبق نیست. ما به تناقض رسیدیم زیرا نتیجه این شد که نقطهٔ z' مخالف نقطهٔ P' بایستی هم بر شعاع $P'L'$ و هم بر شعاع $P'L'_1$ واقع باشد. بدینترتیب ثابت شد که هر نقطهٔ z' واقع بر $P'L'$ سیمای یگانه نقطهٔ $z\left(z=\frac{z'b-a}{z'-1}\right)$ است و ضمناً z بر PLQ واقع است. از اینجا نتیجه میشود که اگر نقطهٔ z'، شعاع $P'L'$ را بپیماید در آنصورت نقطهٔ متناظر آن، z، که از معادلهٔ $z'=\frac{z-a}{z-b}$ تعیین میشود کمان PLQ را خواهد پیمود.

بالاخره نشان میدهیم هنگامیکه z ضمن حرکت در یک جهت از نقطهٔ P بسوی نقطهٔ Q، کمان PLQ را ترسیم مینماید نقطهٔ z' در حالیکه از نقطهٔ P' بینهایت دور میشود شعاع $P'L'$ را در یک جهت ترسیم خواهد نمود. برای این منظور کافی است نشان داده شود که مسافت $P'R'=|z'|=\frac{|z-a|}{|z-b|}=\frac{PR}{QR}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ (شکل ۳۳) ضمن حرکت مذکور نقطهٔ z افزایش می‌یابد و مقادیر بی‌نهایت بزرگ را

بخود میگیرد. اما $\varphi+\alpha+\beta=180^\circ$، از اینجا $\beta=180^\circ-(\alpha+\varphi)$،

$\sin\beta=\sin(\alpha+\varphi)=\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi$ و بالنتیجه

$$P'R'=|z'|=\frac{\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi}{\sin\alpha}=\cos\varphi+\sin\varphi\operatorname{ctg}\alpha.$$

وقتیکه نقطهٔ z بر روی PLQ از P بسوی Q در حرکت است زاویهٔ α از $180^\circ-\varphi$ تا صفر کاهش یافته و زاویهٔ φ بلاتغییر میماند. بنا بر این $\operatorname{ctg}\alpha$ از مقدار $-\operatorname{ctg}\varphi$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد و $|z'|=\cos\varphi+\operatorname{ctg}\alpha\sin\varphi$ نیز (بعلت مثبت بودن عدد $\sin\varphi$) از مقدار $\cos\varphi-\operatorname{ctg}\varphi\sin\varphi=0$ تا $+\infty$ افزایش می یابد.

۲۹. یک دایرهٔ PLM گذرنده از نقطهٔ a ولی ناگذرنده از نقطهٔ b را (شکل ۳۶، الف) در نظر میگیریم. فرض کنیم زاویهٔ بین مماس در نقطهٔ a و جهت baN برابر φ باشد. از نقاط a و b، دایرهٔ کمکی را عبور میدهیم که مماس بر آن در نقطهٔ a با جهت baN زاویهٔ $\varphi+90^\circ$ را تشکیل دهد. این دایره، دایرهٔ اولی را در یک نقطهٔ E قطع خواهد کرد. عدد مختلطی را که توسط این نقطه نمایش داده میشود به c نمایش میدهیم. نشان میدهیم که دایرهٔ PLM بوسیلهٔ تابع $z'=\frac{z-a}{z-b}$ به دایرهٔ $P'L'M'$ (شکل ۳۶، ب) مبدل میگردد که بر پاره‌خط $P'E'$ بعنوان قطر تکیه میکند. نقطهٔ P' نمایشگر عدد صفر، و نقطهٔ E' نمایشگر عدد $c'=\frac{c-a}{c-b}$ است. در ضمن مماس بر دایرهٔ $P'L'M'$ در نقطهٔ P' با جهت مثبت محور حقیقی زاویهٔ φ را تشکیل میدهد.

بدینترتیب ما نیت داریم ثابت نمائیم که برای هر نقطهٔ z واقع بر PLM نقطهٔ متناظر، $z'=\frac{z-a}{z-b}$، بر دایرهٔ $P'L'M'$ واقع است که نقاط صفر و $c'=\frac{c-a}{c-b}$ برای آن بمثابهٔ دو انتهای قطر

شکل ۳۶

است. واضحاً کافی است نشان داده شود که پاره‌خط $P'E'$ از هر نقطهٔ $z'\ \frac{z-a}{z-b}$ (بشرطیکه z بر PLM واقع باشد) تحت زاویهٔ قائمه دیده میشود یا اینکه زاویهٔ $E'R'P'$ با زاویهٔ قائمه برابر است*.
و اما زاویهٔ $E'R'P'$ از بردارهای $E'R'$ و $P'R'$ تشکیل شده که اعداد $z'-c'$ و z' را نمایش میدهند. این زاویه برابر زاویهٔ $S'P'R'$ است که از $P'S'$ بسوی $P'R'$ حساب میشود (بردارهای $P'S'$ و $E'R'$ برابرند). زاویهٔ اخیرالذکر برابر است با $\operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}$. بنا بر این، زاویهٔ مورد توجه ما، $P'R'E'$، نیز با آرگومان عدد $\frac{z'}{z'-c'}$ یکی است یعنی $\widehat{P'R'E'}=\operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}$ عبارت $\frac{z'}{z'-c'}$ را با تعویض z' با $\frac{z-a}{z-b}$، و c' با $\frac{c-a}{c-b}$، تبدیل کرده و بدست می آوریم:

$$\frac{z'}{z'-c'}=\frac{z-a}{z-b}:\left(\frac{z-a}{z-b}-\frac{c-a}{c-b}\right)=\frac{z-a}{z-b}:\frac{(z-c)\,(a-b)}{(z-b)\,(c-b)}=$$

$$=\frac{z-a}{z-c}:\frac{b-a}{b-c}=\frac{z''}{b''}$$

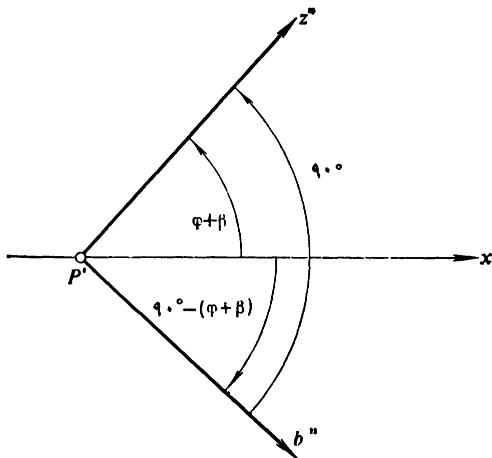
در اینجا ما $z''=\frac{z-a}{z-c}$ و $b''=\frac{b-a}{b-c}$ قرار دادیم. آشکار است z'' نیز تابع کسری خطی از z میباشد. تفاوت این تابع $z''=\frac{z-a}{z-c}$

---

* چونکه نقاطی از صفحه که پاره‌خط داده شده از آنها تحت زاویهٔ قائمه دیده میشود روی دایره‌ای قرار دارد که بر این پاره‌خط بعنوان قطر ساخته شده است.

با تابع اولی $z' = \frac{z-a}{z-b}$ فقط در این است که نقطهٔ b با نقطهٔ c تعویض شده است. آنچه در بند ۲۸ ثابت شد در مورد تابع تازه قابل کاربرد است و آن اینکه اگر نقطهٔ z بر روی کمانی از دایره که a و c را متصل مینماید واقع باشد در آنصورت نقطهٔ z'' باید بر یک شعاع مستقیم‌الخط خارج شده از مبدأ مختصات قرار داشته باشد. در ضمن اگر مماس بر کمان دایره در نقطهٔ a با جهت caU یک زاویهٔ α را تشکیل دهد در آنصورت شعاع مستقیم‌الخط نظیر با جهت مثبت محور حقیقی همان زاویهٔ α را تشکیل میدهد. بعبارت دیگر آرگومان z'' برابر α است. نظر باینکه نقطهٔ z بر کمان PLE از دایره واقع است که از نقاط a و c میگذرد و زاویهٔ بین مماس PT_1 بر این دایره و جهت caU برابر است با $\beta + \varphi$ (شکل ۳۶، الف) لذا آرگومان $z'' = \frac{z-a}{z-c}$ نیز برای همهٔ مواضع z بر کمان PLE برابر $\beta + \varphi$ می‌باشد. از سوی دیگر، نقطهٔ b بر روی کمان PVE از دایره واقع است که نقاط a و c را متصل میسازد. مماس PT_2 بر این کمان در نقطهٔ a با جهت caU زاویهٔ $(\beta + \varphi) - 90^\circ$ را تشکیل میدهد (قدر مطلق این زاویه برابر است با $(\beta + \varphi) - 90^\circ$ ولی از شکل ۳۶، الف دیده میشود که در حالت مورد نظر این زاویه در جهت منفی حساب میشود و لذا علامت «—» بآن اطلاق میشود). بنا بر این، مقدار تابع کسری خطی $\frac{z-a}{z-c}$ متناظر $z = b$ یعنی عدد $b'' = \frac{b-a}{b-c}$ باید بوسیلهٔ نقطهٔ شعاع خارج شده از مبدأ مختصات تحت زاویهٔ $(\beta + \varphi) - 90^\circ$ نسبت به جهت مثبت محور حقیقی نمایش داده شود یعنی $\operatorname{Arg} b'' = (\beta + \varphi) - 90^\circ$.

بیاد بیاورید که میخواستیم زاویهٔ زیر را تعیین کنیم:



شکل ۳۷

$$\widehat{P'R'E'} = \operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}$$

ما پیدا کردیم که $\frac{z'}{z'-c'} = \frac{z''}{b''}$ و همچنین

$$\operatorname{Arg} z'' = \beta + \varphi,\ \operatorname{Arg} b'' = (\beta + \varphi) - ۹۰°$$

از اینجا نتیجه میشود که $\operatorname{Arg}\frac{z''}{b''} = ۹۰°$ (شکل ۳۷) و

$$\widehat{P'R'E'} = \operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'} = \operatorname{Arg}\frac{z''}{b''} = ۹۰°$$

بدینترتیب از هر نقطهٔ $z' = \frac{z-a}{z-b}$، پاره خط $P'E'$ تحت زاویهٔ قائمه دیده میشود. این بدان معنی است که نقطهٔ z' بر

دایرهٔ $P'L'M'$ واقع است که پاره‌خط $P'E'$ قطر * آن میباشد.

بعلاوه باید نشان داد که مماس بر این دایره در نقطهٔ P' با جهت مثبت محور حقیقی زاویهٔ φ را تشکیل میدهد. برای این منظور کافی است نشان داده شود که زاویهٔ بین قطر $P'E'$ و این جهت محور برابر است با $\varphi + ۹۰^\circ$. زاویهٔ اخیرالذکر با $\operatorname{Arg} c' = \operatorname{Arg}\frac{c-a}{c-b}$ یکی است. و اما نقطهٔ c بر کمان PEQ از دایره واقع است که نقاط a و b را متصل میسازد. نظر باینکه مماس بر این کمان در نقطهٔ a با جهت baN زاویهٔ $\varphi + ۹۰^\circ$ را تشکیل میدهد نقطهٔ $c' = \frac{c-a}{c-b}$ باید بر شعاعی واقع باشد که با جهت مثبت محور حقیقی باز هم زاویهٔ $\varphi + ۹۰^\circ$ را تشکیل میدهد یعنی $\operatorname{Arg} c' = ۹۰^\circ + \varphi$ فهوالمطلوب.

۳۰. بعنوان مثال، روشن میکنیم که شکل هاشوری شده در طرف چپ شکل ۳۸ در اثر بازتاب بوسیلهٔ تابع $z' = \frac{z-۱}{z+۱}$ به

---

* برای اثبات، ما نقطهٔ z را بر روی کمان PLE اختیار کردیم. آنگاه نقطهٔ z' متناظر، بر روی نیم‌دایرهٔ $P'L'E'$ واقع میشود. هرگاه نقطهٔ z را بر روی کمان EMP اختیار کنیم آنگاه اثبات تغییری نخواهد کرد. فقط باید توجه باین کرد که جهت مماس بر این کمان در نقطهٔ a مخالف $PT_۱$ است. این بدان معنی است که $\operatorname{Arg} z''$ بجای $\beta + \varphi$ با $\beta + \varphi - ۱۸۰^\circ$ برابر میباشد. لذا برای زاویهٔ $\widehat{P'R'E'} = \operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}$ مقدار $-۹۰^\circ = (\beta + \varphi - ۹۰^\circ) - (\beta + \varphi - ۱۸۰^\circ)$ را بدست می آوریم و این متناظر است با نقطهٔ z' واقع بر نیم‌دایرهٔ $E'M'P'$.

شکل ۳۸

چه تبدیل میشود. این تابع بگونهٔ $\frac{z-a}{z-b}$ است و ضمناً $a=1$ و $b=-1$. چون کمان PLQ از نقاط ۱ و ۱- عبور کرده و در نقطهٔ $a=1$ زاویهٔ φ را با جهت QPN تشکیل میدهد لذا بموجب بند ۲۸ تبدیل به شعاع $P'L'$ خارج شده از مبدأ مختصات تحت زاویهٔ φ نسبت به جهت مثبت محور حقیقی میشود. کمان PMQ همان نقاط ۱ و ۱- را متصل نموده ولی در نقطهٔ $a=1$ زاویهٔ $\varphi=180^\circ$ را با جهت QPN تشکیل می دهد (قدر مطلق این زاویه برابر است با $\varphi-180^\circ$ و ما این نکته را بحساب آوردیم که در جهت گردش عقربهٔ ساعت یعنی در جهت منفی حساب میشود). بنا بر این، تابع $z'=\frac{z-1}{z+1}$ کمان PMQ را تبدیل به شعاع $P'M'$ خارج شده از مبدأ مختصات تحت زاویهٔ $180^\circ-\varphi$ نسبت به جهت مثبت محور حقیقی مینماید. آشکار است که شعاع های $P'L'$ و $P'M'$ با هم یک خط راست را تشکیل میدهند. بالنتیجه تابع $z'=\frac{z-1}{z+1}$ تمام دایرهٔ $PLQM$ را (که از کمان‌های PLQ و PMQ تشکیل شده) به تمام خط راست $M'P'L'$ تبدیل مینماید.

از نقاط P و Q کمانی از دایرهٔ کمکی عبور میدهیم که مماس بر آن در نقطهٔ P زاویهٔ $\varphi+90$ را با QPN میسازد. این کمان، دایرهٔ PRS را در نقطهٔ E قطع خواهد کرد. بموجب بند ۲۸، کمان PEQ بوسیلهٔ تابع $z'=\frac{z-1}{z+1}$ تبدیل میشود به شعاع خارج شده از نقطهٔ P' تحت زاویهٔ $\varphi+90^\circ$ نسبت به جهت مثبت محور حقیقی. در ضمن نقطه E به یک نقطهٔ E' از این شعاع تبدیل میگردد. بموجب بند ۲۹، دایرهٔ $PRES$ بوسیلهٔ تابع $z'=\frac{z-1}{z+1}$ به دایرهٔ $P'R'E'S'$ تبدیل میشود که پاره‌خط $P'E'$ قطر آن میباشد.

بدینترتیب در اثر تبدیل، دایرهٔ $PLQM$ به خط راست $M'P'L'$، ودایرهٔ $PRES$ مماس بر دایرهٔ اولی از داخل به دایرهٔ $P'R'E'S'$ مماس بر خط راست $M'P'L'$ در نقطهٔ P' مبدل میگردد. آیا میتوان پنداشت که ما دیگر مسئلهٔ تبدیل شکل هاشوری بکمک تابع $z' = \frac{z-1}{z+1}$ را حل نموده ایم؟ خیر، هنوز این مسئله تا آخر حل نشده است چونکه ما فقط این نکته را روشن کردیم که دورهٔ این شکل به چه تبدیل میگردد در صورتیکه باید تبدیل نقاط محصور بین دوایر $PRES$ و $PLQM$ را نیز مورد بررسی قرار داد.

برای روشن ساختن این مطلب نیز متذکر میشویم که تمام شکل هاشوری را میشد پر از دوایر مماس بر $PLQM$ در نقطهٔ P و محصور بین $PRES$ و $PLQM$ نمود. اینها کمان PEQ را در نقاط واقع بین E و Q قطع میکنند. در شکل ۳۸ سه دایره از تعداد بیشمار چنین دوایری با خطچین نمایش داده شده که کمان PEQ را در نقاط E_1، E_2 و E_3 قطع مینمایند. اگر ما پیگیری کنیم که این دوایر بوسیلهٔ تابع $z' = \frac{z-1}{z+1}$ به چه خطوطی تبدیل میگردند آنگاه خواهیم توانست تصوری در بارهٔ چگونگی شکلی نیز پیدا کنیم که از همهٔ این خطوط پر میشود. و همین شکل، شکل تبدیل یافته‌ای خواهد بود.

اما با کاربرد نتایج بند ۲۹ استنتاج میکنیم که دایرهٔ $PR_1E_1S_1$ به دایرهٔ $P'R'_1E'_1S'_1$، و دایرهٔ $PR_2E_2S_2$ به $P'R'_2E'_2S'_2$ تبدیل میگردد و الخ.

در آخر بند ۲۸ ما نشان دادیم که بموازات اینکه نقطهٔ z بر روی کمان PQ حرکت نموده و به Q نزدیک میشود نقطهٔ متناظر آن، z'، در طول شعاع جابجا، و از نقطهٔ اولیهٔ P' دور و دورتر میرود. از اینجا بر می آید که اگر نقطهٔ E_2 از نقطهٔ

E_1 به نقطهٔ Q نزدیکتر باشد در آنصورت E'_2، سیمای نقطه E_2، در مقایسه با E'_1، سیمای نقطهٔ E_1، دورتر از P' بر روی شعاع واقع است. بنا بر این، قطر $P'E'_2$ دایرهٔ $P'R'_2E'_2S'_2$ سیمای دایرهٔ $PR_2E_2S_2$، باید بزرگتر از قطر $P'E'_1$ دایرهٔ $P'R'_1E'_1S'_1$ سیمای دایرهٔ $PR_1E_1S_1$ باشد چنانکه در شکل ۳۸ نشان داده شده است. اگر دایرهٔ $PR_3E_3S_3$ را که PEQ را بقدر کافی نزدیک به Q قطع میکند در نظر بگیریم میتوانیم به حالتی برسیم که سیمای آن، $P'R'_3E'_3S'_3$، دارای قطر هر چه بزرگتر باشد. بعلاوه میتوان نشان داد که به هر دایرهٔ مماس بر خط راست $M'L'$ در نقطهٔ P' و واقع در بخش هاشوری صفحه (شکل ۳۸، طرف راست)، یک دایرهٔ مماس بر دوایر $PRES$ و $PLQM$ در نقطهٔ P و واقع در شکل هاشوری (شکل ۳۸، طرف چپ) متناظر است. واضح است که تمام سیماهای دوایری مانند $PR_1E_1S_1$، $PR_2E_2S_2$، $PR_3E_3S_3$ و غیره که شکل هاشوری طرف چپ شکل ۳۸ را پر کرده‌اند خود نیز شکل هاشوری طرف راست شکل مذکور را پر خواهند نمود. همین شکل هم سیمای شکل اولیهٔ بازتاب شده بوسیلهٔ تابع $z'=\frac{z-1}{z+1}$ است. بدینترتیب تابع $z'=\frac{z-1}{z+1}$ شکل محدود به دو دایره را (شکل ۳۸، طرف چپ) به شکل محدود به خط راست و دایره (شکل ۳۸، طرف راست) بازتاب مینماید.

۳۱. حال به تبدیل بوسیلهٔ تابع $z'=z^2$ میپردازیم. در تبصرهٔ صفحهٔ ۳۷ به خواننده گوشزد کردیم که در تبدیلات بوسیلهٔ توابع گویا ممکن است حالت استثنائی در قاعدهٔ کلی مبنی بر حفظ زوایا پیش آید و آن اینکه زوایا برأس در بعضی نقاط استثنائی ممکن است چند برابر تغییر کنند. در این مورد بخصوص، چنین

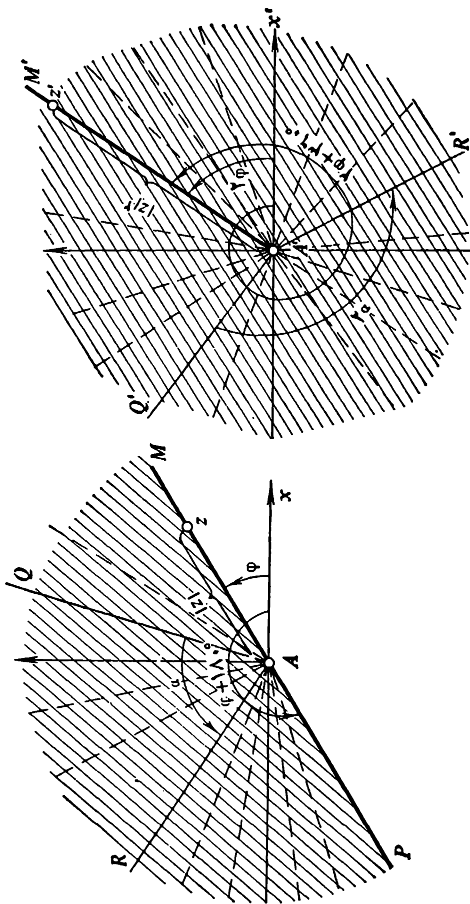
نقطهٔ استثنائی هست و آن مبدأ مختصات، A است. نشان میدهیم که همهٔ زوایا برأس در نقطهٔ A در اثر تبدیل $z'=z^2$ دو برابر افزایش می‌یابند.

شعاع AM خارج شده از نقطهٔ A تحت زاویهٔ φ نسبت به بخش مثبت محور حقیقی را در نظر میگیریم (شکل ۳۹). برای هر نقطهٔ z واقع بر این شعاع، $\operatorname{Arg} z=\varphi$ چون بردار $z'=z^2=z\times z$ از بردار z از طریق کشش باندازهٔ $|z|$ برابر و چرخش بزاویهٔ $\operatorname{Arg} z=\varphi$ بدست می آید لذا $|z'|=|z|\times|z|=|z|^2$ و $\operatorname{Arg} z'=\operatorname{Arg} z+$ $\operatorname{Arg} z=2\varphi+$. بنا بر این، نقطهٔ z' باید بر روی شعاع $A'M'$ خارج شده از نقطهٔ A' تحت زاویهٔ 2φ نسبت به بخش مثبت محور حقیقی واقع باشد. اگر نقطهٔ z بر روی AM از نقطهٔ A تا بینهایت دور جابجا شود در آنصورت نقطهٔ متناظر، z'، بر روی $A'M'$ از نقطهٔ A' تا بینهایت دور جابجا خواهد شد. در ضمن فاصلهٔ z' تا A' همیشه برابر خواهد بود با مجذور فاصلهٔ z تا A ($|z'|=|z|^2$).

از اینجا نتیجه میشود که تابع $z'=z^2$ شعاع AM را به شعاع $A'M'$ مایل به محور $A'x'$ تحت زاویهٔ دو برابر زاویهٔ میل اولیه تبدیل مینماید.

بآسانی میتوان درک کرد که شعاع AP دارای زاویهٔ $\varphi+180^\circ$ با Ax (AM و AP بر روی یک خط راست واقع‌اند) بوسیلهٔ تابع $z'=z^2$ به همان شعاع $A'M'$ تبدیل میگردد. در واقع، اگر زاویهٔ $\varphi+180^\circ$ را دو برابر کنیم $2\varphi+360^\circ$ بدست می‌آید. شعاع مایل به $A'x'$ تحت همین زاویه، بر $A'M'$ منطبق است.

ببینیم شکل هاشوری طرف چپ شکل ۳۹ که آنرا نیم‌صفحه گویند بوسیلهٔ تابع $z'=z^2$ به چه تبدیل میشود. نیم‌صفحه را میتوان پر از تعداد بیشمار شعاع های خارج شده از A' و مایل به Ax تحت زوایای بزرگتر از φ ولی کوچکتر از $\varphi+180^\circ$ بحساب آورد



شکل ۲۹

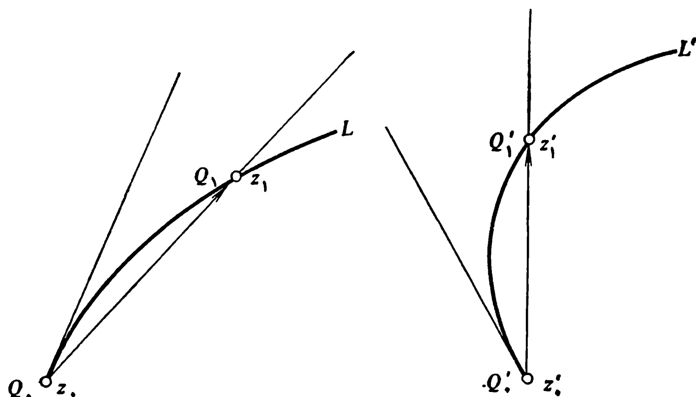
شعاع های AM و AP سرحد نیم‌صفحه را بصورت یک خط راست تشکیل میدهند. ما این شعاع ها را جزو خود نیم‌صفحه نمی شماریم. تابع $z'=z^2$، شعاع های متعلق به نیم‌صفحه را تبدیل به همه‌گونه شعاع های خارج شده از A' و مایل به $A'x'$ تحت زوایای بزرگتر از 2φ ولی کوچکتر از $2\varphi+360^\circ$ مینماید.

از اینجا بر می آید که نیم‌صفحهٔ محدود به شعاع های AM و AP به شکل محدود به یک شعاع $A'M'$ تبدیل میگردد (شکل ۳۹، طرف راست). شکل اخیرالذکر را میتوان بعنوان صفحه‌ای در نظر گرفت که شعاع $A'M'$ از آن برداشته (یا حذف) شده است. با این گفته ما میخواهیم تاکید کنیم که این شکل بوسیلهٔ همهٔ نقاط صفحه باستثنای نقاط واقع بر $A'M'$ بوجود آمده است. اگر در نیم‌صفحه، دو شعاع AQ و AR مایل به Ax تحت زاویه‌های φ_1 و φ_2 $(\varphi_2>\varphi_1)$ را در نظر بگیریم آنها زاویهٔ $\alpha=\varphi_2-\varphi_1$ را با هم تشکیل میدهند. در اثر تبدیل $z'=z^2$ این شعاع ها به $A'Q'$ و $A'R'$ مایل به $A'x'$ تحت زاویهٔ $2\varphi_1$ و $2\varphi_2$ تبدیل میگردند. آشکار است که زاویهٔ $Q'A'R'$ برابر است با $2\alpha=2(\varphi_2-\varphi_1)=2\varphi_2-2\varphi_1$.

بدینترتیب زوایا برأس A در اثر تبدیل $z'=z^2$ مضاعف میگردند یا بعبارت دیگر تشابه زوایا در نقطهٔ A بر هم میخورد.

۳۲. نشان میدهیم که زاویه‌ها برأس در هرگونه نقطهٔ $z_0\neq 0$ در اثر تبدیل $z'=z^2$ تغییر نمیکنند. از اینجا نتیجه میشود که مبدأ مختصات یگانه نقطه‌ای است که در آن تشابه در این تبدیل بر هم میخورد.

فرض کنیم L منحنی‌ای باشد خارج شده از نقطهٔ z_0. اگر نقطهٔ z_1 مخالف z_0 را بر روی L اختیار کنیم در آنصورت جهت قاطع واصل z_0 و z_1 بر جهت بردار Q_0Q_1 نمایشگر تفاضل z_1-z_0



شکل ۴۰

(شکل ۴۰، طرف چپ) منطبق خواهد بود. منحنی L بوسیلهٔ تابع $z'=z^2$ به یک منحنی L'، و نقاط z_0 و z_1 به نقاط جدید $z'_0=z_0^2$ و $z'_1=z_1^2$ واقع بر منحنی L' تبدیل میگردند. واضح است که جهت قاطع واصل z'_0 و z'_1 بر جهت بردار $Q'_0Q'_1$ نمایشگر تفاضل $z'_1-z'_0$ (شکل ۴۰، طرف راست) منطبق است. جهت‌های دو قاطع را با هم مقایسه میکنیم. برای این منظور کافیست جهات بردارهای $z'_1-z'_0$ و z_1-z_0 با هم مقایسه شود. چون زاویهٔ بین آنها که از بردار z_1-z_0 بسوی بردار $z'_1-z'_0$ حساب می شود بر آرگومان خارج‌قسمت $\frac{z'_1-z'_0}{z_1-z_0}$ منطبق است لذا تمام مقایسه در محاسبهٔ $\operatorname{Arg}\frac{z'_1-z'_0}{z_1-z_0}$ خلاصه میگردد. خارج‌قسمت $\frac{z'_1-z'_0}{z_1-z_0}$ را میتوان از

طریق تعویض z'_1 و z'_0 با عبارات آنها تبدیل نمود: $z'_1 = z_1^2$ و $z'_0 = z_0^2$. بدست می‌آوریم:

$$\frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0} = \frac{z_1^2 - z_0^2}{z_1 - z_0} = z_1 + z_0, \quad \operatorname{Arg}\frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0} = \operatorname{Arg}(z_1 + z_0)$$

بالنتیجه زاویهٔ بین جهات قاطع‌های منحنی‌های L' و L که از جفت نقاط متناظر، z_0 و z_1 (بر روی L) و $z'_0 = z_0^2$ و $z'_1 = z_1^2$ (بر روی L') عبور داده شده با $\operatorname{Arg}(z_1 + z_0)$ برابر است. برای انتقال از قاطع‌ها به مماس‌ها، نقطهٔ z_1 را بطور نامحدود بر روی منحنی L به نقطهٔ z_0 نزدیک میکنیم. آنگاه نقطهٔ $z_1 = z_1^2$ نیز بطور نامحدود بر روی منحنی L' به نقطهٔ $z'_0 = z_0^2$ نزدیک میشود. بنا بر این، قاطع‌های ما نیز بطور نامحدود به مماس‌های مار بر نقاط z_0 و z'_0، و زاویهٔ بین قاطع‌ها به زاویهٔ بین مماسها نزدیک میشوند. اما زاویهٔ بین قاطع‌ها برابر است با $\operatorname{Arg}(z_0 + z_1)$ و با گرایش z_1 به z_0، خود به $\operatorname{Arg}(2z_0)$ میل میکند که بر $\operatorname{Arg} z_0$ منطبق است. بدینترتیب زاویهٔ بین مماسهائی بر منحنی‌های L' و L که از نقاط مربوطهٔ $z'_0 = z_0^2$ و z_0 عبور داده شده با $\operatorname{Arg} z_0$ برابر است. مثلا هرگاه $z_0 = 2$ آنگاه $\operatorname{Arg} z_0 = 0$. از اینجا نتیجه میشود که جهت مماس در نقطهٔ $z_0 = 2$ بر هرگونه منحنی L مار بر آن، منطبق است با جهت مماس در نقطهٔ $z'_0 = z_0^2 = 4$ در منحنی L' که از طریق تبدیل بوسیلهٔ تابع $z' = z^2$ از L بدست می آید. اگر $z_0 = i$ در آنصورت $\operatorname{Arg} z_0 = 90^\circ$. بنا بر این، مماس در نقطهٔ $z_0 = i$ بر هرگونه منحنی L عبور داده شده از این نقطه و مماس در نقطهٔ $z_0^2 = i^2 = -1$ بر سیمای منحنی L، متعامد هستند.

به حالت کلی بر میگردیم. میتوان گفت که مماس‌ها وقتیکه منحنی‌های مار بر نقطهٔ z_0 بوسیلهٔ تابع $z' = z^2$ تبدیل میگردند

بزاویهٔ برابر با $\operatorname{Arg} z_0$ دوران می یابند.

اکنون درک این نکته آسان است که چرا زوایا برأس z_0 ($z_0 \neq 0$) در خلال این تبدیل بلاتغییر میمانند. اگر دو منحنی L_1 و L_2 مار بر نقطهٔ z_0 با هم زاویهٔ α را در این نقطه تشکیل دهند این بدان معناست که مماس‌ها بر منحنی‌ها در این نقطه زاویهٔ α را با هم تشکیل میدهند. بعد از تبدیل، نقطهٔ z_0 به نقطهٔ $z'_0 = z_0^2$، و منحنی‌های L_1 و L_2 به منحنی‌های L'_1 و L'_2 تبدیل میگردند. جهات مماس‌ها در نقطهٔ z_0 بر منحنی‌های جدید از جهات پیشین مماس‌ها از راه دوران بهمان زاویهٔ برابر $\operatorname{Arg} z_0$ بدست میاید. بدیهیست که زاویهٔ بین مماس‌های جدید، مقدار پیشین α را حفظ خواهد کرد. و این بدان معنی است که زاویهٔ بین منحنی‌ها برأس در نقطهٔ دلخواه $z_0 \neq 0$ در اثر تبدیل $z' = z^2$ تغییر نخواهد کرد.

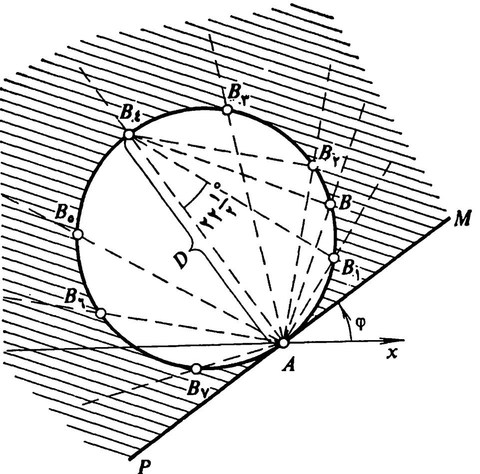
یادآور میشویم طریقه‌ای که برای اثبات تشابه زوایای تبدیل $z' = z^2$ بکار رفت در مورد دیگر توابع نیز مثلا تابع کسری خطی $z' = \frac{z-a}{z-b}$ یا تابع ژوکفسکی $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ قابل کاربرد است. منتها در اینجا عبارات دیگری برای زاویهٔ دوران مماس بدست می‌آید. مثلا برای تابع کسری خطی این نتیجه حاصل می شود که مماس‌ها بر منحنی‌های مار بر نقطهٔ z_0 بزاویهٔ برابر با $\operatorname{Arg} \frac{a-b}{(z_0-b)^2}$،

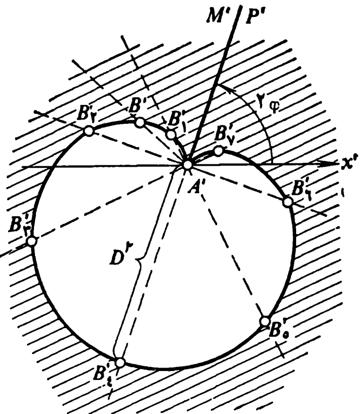
و در مورد تابع ژوکفسکی آنها بزاویهٔ برابر با $\operatorname{Arg}\left(1 - \frac{1}{z_0^2}\right)$ دوران می‌یابند. در مورد اول باید مضافاً فرض شود که $z_0 \neq b$ (در این نقطه عبارت $\frac{z-a}{z-b}$ بی‌معنی است). در مورد دوم فرض‌های اضافی عبارتست از $z_0 \neq 0$ (بنا بر علت مشابه) و بعلاوه، از $z_0 \neq \pm 1$

(در این نقاط $1-\frac{1}{z^2}$ تبدیل به صفر میگردد و بنا بر این $\mathrm{Arg}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$ معنی را از دست میدهد). میشد تحقیق کرد که در مورد تابع ژوکفسکی، تشابه در نقاط ۱- و ۱+ بر هم‌خورده و زوایا برأس در این نقاط در اثر تبدیل دو برابر میشوند.

۳۳. حال ببینیم دایرهٔ مار بر مبدأ مختصات A بوسیلهٔ تابع $z'=z^2$ به چه تبدیل میشود. فرض کنیم مماس بر دایره در این نقطه زاویهٔ α را با Ax تشکیل دهد (شکل ۴۱). آشکار است که دایره در نیم‌صفحهٔ محدود به این مماس واقع است. تابع $z'=z^2$ نیم‌صفحه را به صفحهٔ عاری از شعاع $A'M'$ مبدل میگرداند. برای یافتن سیمای دایره، همه‌گونه شعاع‌ها را در نیم‌صفحه می گذرانیم و بر روی هر یک از آنها نقطهٔ تقاطع با دایره را علامت‌گذاری مینمائیم. در نقشهٔ ما، برای مشخص بودن بررسی، هفت شعاع نمایش داده شده است. تمام زوایای MAB_1، B_1AB_2، B_2AB_3،...، B_7AP برابر هم در نظر گرفته شده اند (هر یک $22\frac{1}{2}^\circ$). تابع $z'=z^2$ آنها را به شعاع‌هائی تبدیل مینماید که با هم زاویهٔ مضاعف دارند. هر یک از زوایای $M'A'B'_1$، $B'_1A'B'_2$، $B_2A'B_3$،...، $B'_7A'P'$ برابر 45° است.

محاسبه میکنیم نقاط B_1، B_2، B_3،...، B_7 بکجا منتقل میشوند. فاصلهٔ سیماهای آنها B'_1، B'_2، B'_3،...، B'_7 از نقطهٔ A' برابرند با مجذور فاصله‌های AB_1، AB_2، AB_3،...، AB_7. اما از شکل ۴۱ دیده میشود که $AB_7=AB_1=AB_4\sin 22\frac{1}{2}^\circ=D\sin 22\frac{1}{2}^\circ$ (D قطر دایره است). سپس، $AB_6=AB_2=D\sin 45^\circ$،





شکل ۴۱

$AB_5 = AB_3 = D\sin ۶۷\frac{۱^\circ}{۲}$، $AB_4 = D$. لازم بتذکر است که

$$\sin^۲ ۲۲\frac{۱^\circ}{۲} = \frac{۱-\cos ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} =$$

$$= \frac{۲-۱,۴۱۴۲...}{۴} = ۰,۱۴۶۴...,$$

$$\sin^۲ ۴۵^\circ = ۰,۵۰۰۰ ..., \quad \sin^۲ ۶۷\frac{۱^\circ}{۲} = \cos^۲ ۲۲\frac{۱^\circ}{۲} =$$

$$= ۱ - \sin^۲ ۲۲\frac{۱^\circ}{۲} = ۰,۸۵۳۵...$$

بنا بر این $A'B'_1 = A'B'_7 = ۰,۱۴۶۴\ D^۲$، $A'B'_2 = A'B'_6 =$ $= ۰,۵۰۰۰\ D^۲$ ، $A'B'_3 = A'B'_5 = ۰,۸۵۳۵\ D^۲$ ، $A'B'_4 = D^۲$.
از نقاط A، B'_1، B'_2، B'_3، ...، B'_7 منحنی‌ای میگذرد که سیمای دایره در تبدیل $z' = z^۲$ میباشد. برای کسب تصور دقیقتری از آن میشد تعداد بیشتری شعاع در نظر گرفت. این منحنی نام کاردیوئید را دارد (کلمهٔ کاردیوئید بمعنی قلبی‌شکل است). بآسانی میتوان دریافت که شکل هاشوری طرف چپ شکل ۴۱ (که با حذف دایره از نیم‌صفحه بدست می‌آید) بوسیلهٔ تابع $z' = z^۲$ به شکلی تبدیل میشود که در طرف راست همان نقشه هاشور زده شده است. این شکل به کاردیوئید (قلبی) و شعاع $A'M'$ دارای زاویهٔ ۲φ با جهت مثبت محور حقیقی محدود است. میتوان نشان داد که شعاع $A'M'$ در امتداد مماس بر هر یک از دو کمان قلبی که از نقطهٔ A خارج میشوند متوجه است. در واقع، اگر یک شعاع AB را در طرف چپ شکل ۴۱ عبور دهیم و B نقطهٔ تقاطع آن با دایره باشد و اگر زاویهٔ $MAB = \alpha$، در آنصورت $AB = D\sin\alpha$.

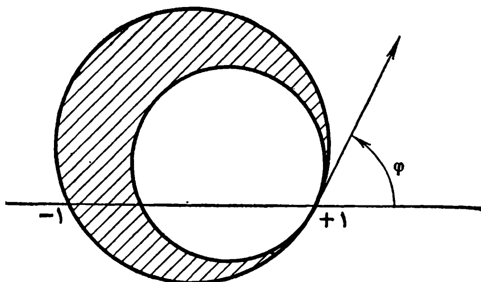
این شعاع بوسیلهٔ تابع $z'=z^{2}$ به شعاع $A'B'$ (شکل ۴۱، طرف راست) تبدیل میشود و در ضمن نقطهٔ B' که سیمای نقطهٔ B است بر روی قلبی واقع میگردد. بر اساس خواص تبدیل $z'=z^{2}$ که بر ما معلوم است، داریم: $\widehat{M'A'B'}=2\alpha$ و $A'B'=AB^{2}=D^{2}\sin^{2}\alpha$.
زاویهٔ α را متغیر در نظر میگیریم و آنرا وادار میکنیم بطور نامحدود به صفر نزدیک شود. آنگاه زاویهٔ 2α بین $A'B'$ و $A'M'$ نیز بطور نامحدود بصفر نزدیک خواهد شد و خود شعاع $A'B'$ که نسبت به قلبی، قاطع میباشد ضمن دوران در حول نقطهٔ A' بطور نامحدود به وضع حد $A'M'$ نزدیک خواهد شد. ضمناً نقطهٔ B' که نزدیکترین به نقطهٔ A' تلاقی قاطع با منحنی میباشد بطور نامحدود به A' نزدیک خواهد شد چونکه فاصلهٔ $A'B'=D^{2}\sin^{2}\alpha$ در ازای میل α به صفر، به صفر میگراید. از اینجا بر می آید که $A'M'$ یعنی وضع حدی قاطع، مماس بر کمان ... $A'B'_{1}B'_{2}$ در نقطهٔ A' میباشد. همچنین میتوان اطمینان حاصل نمود از اینکه $A'M'$ بر کمان ... $A'B'_{7}B'_{6}$ نیز در همان نقطهٔ A' مماس میباشد.

۳۴. بالاخره به تابع ژوکفسکی رو می آوریم:

$$z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

و آنرا در تبدیل شکل محدود به دو دایره، یکی مار بر نقاط ۱- و ۱+ و دیگری مماس بر اولی در داخل آن در نقطهٔ ۱، بکار میبریم. این شکل در شکل ۴۲ هاشور زده شده است.
اول یقین حاصل میکنیم از اینکه تبدیل

$$z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



شکل ۴۲

را میتوان به چند تبدیل متوالی ساده‌تری که دیگر برای ما آشناست تحویل داد. برای این منظور نسبت

$$\frac{z'-1}{z'+1}$$

را در نظر میگیریم. با تعویض z' در آن با عبارت

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

پیدا میکنیم:

$$\frac{z'-1}{z'+1}=\frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)-1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}=\frac{z^2+1-2z}{z^2+1+2z}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

بدینترتیب از اینکه

$$z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

نتیجه میشود که

$$\frac{z'-1}{z'+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

حکم عکس نیز صادق است: از دومی اولی نتیجه میشود. در حقیقت، از دومی بدست می‌آوریم:

$$z'-1=z'\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

و از اینجا

$$z'\left[1-\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2\right]=1+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

و سپس

$$z'=\frac{1+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1-\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}=\frac{(z+1)^2+(z-1)^2}{(z+1)^2-(z-1)^2}=$$

$$=\frac{2z^2+2}{4z}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

بدینترتیب روابط

$$\frac{z'-1}{z'+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \quad \text{و} \quad z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

هم‌ارزند (یکی از دیگری نتیجه میشود).

بنا بر این، تبدیل ژوکفسکی

$$z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

را میتوان بصورت

$$\frac{z'-1}{z'+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

نمایش داد. نتیجه باید همان باشد. اما اکنون واضح است که انتقال از z به z' را میتوان در سه مرحله انجام داد: اول از z به متغیر کمکی z_1 طبق فرمول

$$z_1=\frac{z-1}{z+1} \qquad (1)$$

و سپس از z_1 به z_2 طبق فرمول

$$z_2=z_1^2 \qquad (2)$$

و بالاخره از z_2 به z' طبق فرمول

$$\frac{z'-1}{z'+1}=z_2 \qquad (3)$$

خواننده بآسانی میتواند تحقیق نماید که هرگاه عبارت z_1 از فرمول (۱) را در (۲) قرار داده و سپس عبارت بدست آمده برای z_2 را در (۳) بگذاریم آنگاه تبدیل مطلوب ما،

$$\frac{z'-1}{z'+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

بدست می‌آید.

آیا در تعویض یک تبدیل ژوکفسکی با سه تبدیل متوالی (۱)، (۲) و (۳) چه معنی نهفته است؟ معنی در آنست که هر یک از آنها از تبدیل ژوکفسکی ساده‌تر و بر ما معلوم است.

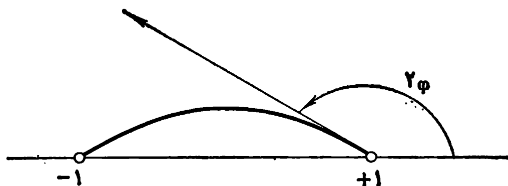
اینک در مورد شکل نموده شده در شکل ۴۲، تبدیل (۱) را، و در مورد نتیجهٔ بدست آمده، تبدیل (۲) را، و سرانجام در مورد

نتیجهٔ تبدیل (۲)، تبدیل (۳) را نیز بکار میبریم.
بیاد میاوریم در بند ۳۰ ما کشف کردیم که شکلی که در طرف چپ شکل ۳۸ رسم شده (و با شکل نموده شده در شکل ۴۲ یکی است) بوسیلهٔ تابع

$$z_1 = \frac{z-1}{z+1}$$

یعنی تابع (۱) به شکلی تبدیل میشود که در طرف راست شکل ۳۸ نموده شده است. شکل اخیرالذکر به خط راست مار بر نقطهٔ O و دارای زاویهٔ φ با جهت مثبت محور حقیقی، و دایرهٔ مماس بر این خط راست در نقطهٔ O محدود است. این شکل را میتوان بعنوان نیم‌صفحه‌ای در نظر گرفت که دایره از آن حذف شده است. سپس این شکل را بوسیلهٔ تابع (۲)، $z_2 = z_1^2$، تبدیل می نمائیم. یک نگاه بر شکل ۴۱ کافیست تا ببینیم که این مسئله را نیز در بند ۳۳ حل نموده‌ایم. در آخر بند مذکور، ما متذکر شدیم که در این مورد شکلی باید حاصل شود که در طرف راست شکل ۴۱ نموده شده است. این شکل به شعاع و قلبی محدود است. بنا بر این چیزی که میماند کاربرد تبدیل (۳)، $z_2 = \frac{z'-1}{z'+2}$، درمورد شکل اخیرالذکر است.

از آنچه در بند ۲۸ گذشت (فقط باین تفاوت که در اینجا z_2 بعنوان متغیر مستقل، و z' بعنوان تابع در نظر است) نتیجه میشود که هرگاه z_2، شعاع $A'M'$ خارج شده از مبدأ تحت زاویهٔ 2φ نسبت به بخش مثبت محور حقیقی را ترسیم نماید نقطهٔ نظیر، z'، کمان مستدیر واصل نقاط ۱+ و ۱− را میپیماید. مماس بر این کمان در نقطهٔ ۱+ با جهت نقطهٔ ۱− بسوی نقطهٔ ۱+ یعنی با



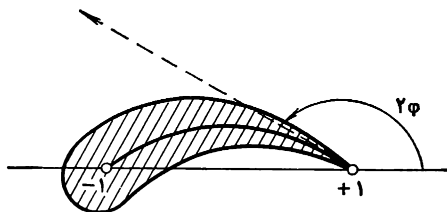
شکل ۴۳

جهت مثبت محور حقیقی همان زاویهٔ ۲φ را تشکیل می دهد (شکل ۴۳).

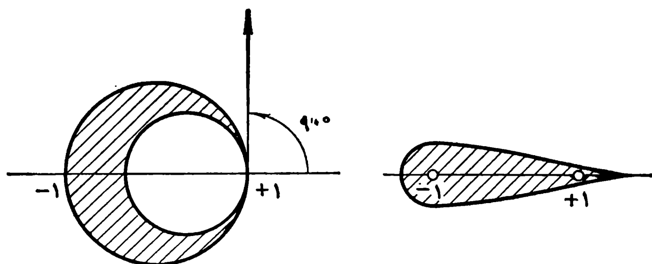
در نتیجه، ما سیمای شعاع $A'M'$ را در تبدیل $z_۲=\frac{z'-۱}{z'+۱}$ پیدا کردیم. برای یافتن سیمای قلبی میشد انتقال نقاط آنرا، مثلا نقاط $B'_۱$، $B'_۲$،...، $B'_۷$، دنبال کرد. ولی ما بجای انجام محاسبات پیچیده فقط به نمایش منحنی تبدیل یافته بصورت نهائی آن در شکل ۴۴ قناعت میکنیم.

شکلی که بوسیلهٔ آن محدود است بصورت پروفیل یا مقطع عرضی بال هواپیماست. چنین پروفیل هائی برای اولین بار توسط دانشمندان روس، ن. ی. ژوکفسکی و س. آ. چاپلیگین پیشنهاد گردید و بهمین لحاظ است که بنام پروفیل ژوکفسکی ــ چاپلیگین معروف است.

با تغییر دادن زاویهٔ φ میل مماس بر دایره در نقطهٔ ۱ (شکل ۴۲) و شعاع دایرهٔ کوچکتر میتوان پروفیل های گوناگون بدست آورد.



شکل ۴۴



شکل ۴۵

در حالت خاص وقتیکه زاویهٔ φ قائمه باشد یعنی وقتیکه دایرهٔ بزرگتر بر پاره‌خط ۱- تا ۱+ بعنوان قطر آن ساخته شده باشد پروفیل نظیر نسبت به محور حقیقی قرینگی دارد (شکل ۴۵). بعضی اوقات چنین پروفیلی را سکان ژوکفسکی مینامند.

پروفیلهای ژوکفسکی- چاپلیگین در همهٔ پژوهشهای مربوط به نظریهٔ بال هواپیما نقش پروفیلهای پایه را ایفاء مینمایند.

تمرینها و مسایل

۱. اثبات کنید که اگر دو عدد مختلط $c_1 = a_1 + ib_1$ و $c_2 = a_2 + ib_2$ برابر باشند در آنصورت بخش‌های حقیقی و موهومی آنها نیز بترتیب برابرند: $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$.

راهنمائی. این نکته را مبدأ قرار دهید که اعداد مختلط برابر بوسیله بردارهای متوازی و همسو با طول‌های برابر نمایش داده میشود.

۲. با کاربرد قوانین جابجائی، ترکیب و توزیع در اعمال جمع و ضرب، اعمال زیر را روی اعداد مختلط انجام دهید:

الف) $(-1+5i)+(-2+i)+(3-7i)$؛ ب) $(3+7i)(3-7i)$؛

پ) $(1+i\sqrt{3})(1+i)$؛ ت) $(1-i)^2:(1+i)^2$؛

ث) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$.

جواب‌ها. الف) $-i$؛ ب) ۵۸؛ پ) $(1+\sqrt{3})i+1-\sqrt{3}$؛ ت) -1؛ ث) -1.

۳. اثبات کنید که هر عدد مختلط $c = a + bi \neq 0$ با قدر مطلق برابر r و آرگومان برابر α را میتوان بصورت

$$c = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

(صورت مثلثاتی عدد مختلط) در آورد.
راهنمائی. a و b را بر حسب r و α بکمک نقشهٔ نمایش دهندهٔ $c = a + bi$ بصورت برداری بیان نمائید.

۴. اثبات کنید که اگر

$$c_1 = r_1 (\cos\alpha_1 + i \sin\alpha_1) \text{ و } c_2 = r_2 (\cos\alpha_2 + i \sin\alpha_2)$$

در آنصورت

$$c_1 c_2 = r_1 r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

راهنمائی. از تعریف هندسی قاعدهٔ ضرب اعداد مختلط استفاده نمائید یا c_1 و c_2 را با کاربرد قوانین جمع و ضرب در هم ضرب نموده و سپس فرمولهای کسینوس و سینوس مجموع را بکار برید.

۵. با تکیه بر نتیجهٔ مسئلهٔ قبل اثبات کنید که اگر

$$c = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

(r قدر مطلق c و α آرگومان c است) در آنصورت

$$c^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

(n عدد طبیعی است). از اینجا نتیجهٔ زیر را بگیرید:

$$(\cos\alpha + i \sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

(فرمول مواور).

۶. با استفاده از فرمول مواور (مسئله ۵ را ببینید) محاسبه کنید:

الف) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$؛ ب) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{217}$

راهنمائی. $\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$،

$\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

جوابها. الف) -1؛ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

۷. با مبدأ قرار دادن فرمول مواور (مسئله ۵ را ببینید)، فرمولهائی جهت $\cos n\alpha$ و $\sin n\alpha$ در ازای $n = 2, 3, 4$ استخراج نمائید.

راهنمائی. در فرمول مواور $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ باید جملهٔ $\cos\alpha + i\sin\alpha$ را مستقیماً از طریق ضرب، مثلا $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha$، بتوان n رساند و سپس نوشت که بخش‌های حقیقی و موهومی در راست و چپ علامت تساوی در فرمول مواور بترتیب با هم برابرند.

جوابها. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$، $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$، $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$،

$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$،

$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$.

۸. مثلثی برئوس در نقاط ۰، $1-i$، $1+i$ در نتیجهٔ تبدیل

$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$$

به چه چیز مبدل میگردد؟ معنی هندسی این تبدیل چیست؟

راهنمائی. از روشن کردن معنی هندسی شروع کنید. و اما

همچنین از محاسبهٔ رئوس مثلث تبدیل یافته نیز میتوان شروع کرد.

۹. نیم‌دایرهٔ واقع بالاتر از محور حقیقی و متکی بر پاره‌خطی به دو انتهای ۱- و ۱+ بعنوان قطر خود در نتیجهٔ تبدیل $z'=\frac{z-1}{z+1}$ به چه چیز مبدل میگردد؟

جواب. به زاویهٔ قائمهٔ محدود به بخش فوقانی محور موهومی و بخش منفی محور حقیقی.

۱۰. زاویهٔ α برأس در مبدأ مختصات در نتیجهٔ تبدیل $z'=z^3$ به چه چیز مبدل میگردد؟

جواب. به زاویهٔ 3α برأس در مبدأ مختصات.

خوانندگان گرامی!

بنگاه نشریات «میر» خواهشمند است نظریات خود را در بارهٔ این کتاب و ترجمه و چاپ آن و نیز سایر نظریات و پیشنهادهای خود را برای ما بفرستید.

بنگاه نشریات «میر» کتاب‌های علمی و برخی کتاب‌های دیگر را به بسیاری از زبانهای جهان، از جمله بزبان فارسی، ترجمه و منتشر میکند.

شما میتوانید نظریات و پیشنهادهای خود را به نشانی زیر بفرستید:

«میر»، پروی ریژسکی ۲،
مسکو، اتحاد شوروی

قابل توجه خوانندگان گرامی!

در سال ۱۹۸۲ بنگاه نشریات «میر» کتاب آ. مارکوشویچ «دنباله های برگردا» را بزبان فارسی چاپ و منتشر میکند.

در این جزوهٔ آکادمیسین آ. مارکوشویچ نظریهٔ دنباله‌های برگردا با زبانی عامه‌فهم بیان شده است. دنباله‌های برگردا شامل حالات خاصی مانند تصاعدهای حسابی و هندسی، دنباله‌های مربعات و مکعبات اعداد طبیعی، اعداد فیبوناچی و هرگونه دنبالهٔ متناوب میباشد. این نظریه کاملاً ابتدائی بوده و بصورت قابل فهم دانش‌آموزان دورهٔ پایان دبیرستان بیان شده است.

قابل توجه خوانندگان گرامی!

در سال ۱۹۸۲ بنگاه نشریات «میر» چاپ دوم فارسی کتاب ی. پرلمان «فیزیک برای سرگرمی» را در دو جلد منتشر مینماید.

چاپ اول فارسی این کتاب جالب چند سال است که در بازار کتاب کمیاب شده و خوانندگان با ارسال نامه‌های تحسین‌آمیز در بارهٔ این کتاب ما را بر آن داشتند تا به تهیهٔ چاپ مجدد مبادرت ورزیم. مسلماً در چاپ جدید، اصلاحات و تغییراتی در جهت بهبود چاپ و آرایش کتاب وارد گردیده است.

قابل توجه خوانندگان گرامی!

در سال ۱۹۸۳ بنگاه نشریات «میر» کتاب ی. پرلمان مروج سرشناس علوم، تحت عنوان «ریاضیات زنده» را که در آن چیستان‌ها و معماهای گوناگون گرداوری شده چاپ و منتشر خواهد کرد. برای حل این معماها آشنایی با علم حساب و هندسهٔ ابتدایی بس است. فقط بعضی از این مسایل از خواننده توانایی تشکیل و حل معادلات ساده را ایجاب می نماید.

این کتاب برای دانش‌آموزان مدارس متوسطه و دوستداران ریاضیات در نظر گرفته شده است.

قابل توجه خوانندگان گرامی!

در سال ۱۹۸۳ بنگاه نشرنات «میر» کتاب م. سودو «زمین‌شناسی برای همه» را منتشر خواهد کرد.

م. سودو دکتر علوم زمین‌شناسی خواننده را با مبانی زمین‌شناسی آشنا میسازد. وی حکایت مینماید کرهٔ ارض ما چگونه بوجود آمده، از چه چیز ترکیب یافته، چه فرایندهایی در اعماق و سطح آن رخ میدهد، خاستگاه‌های معادن چگونه بوجود می‌آید و روش تحقیقات زمین‌شناسی چگونه است.

خواننده از این کتاب از ویژگی‌های ساختمانی کرهٔ ارض، پوسته‌های خارجی و داخلی آن، ترکیب شیمیائی و کانی پوستهٔ زمین و سنگهای تشکیل دهندهٔ آن و نیز از مراحل اصلی تاریخ زمین‌شناختی کرهٔ زمین کسب اطلاع مینماید.

کتاب مذکور برای محافل وسیع خوانندگان در نظر گرفته شده است.



بنگاه نشریات "میر" مسکو